

- قرّرت وزارة التربية والتعليم تدريس
- هذا الكتاب وطبعه على نفقتها



المملكة العربية السعودية
وزارة التربية والتعليم
التطوير التربوي

الرياضيات

للصف الثاني الثانوي (بنين)
قسم العلوم الطبيعية
الفصل الدراسي الأول

تأليف

د. محمد عبد الرحمن القويز
د. عبد الله محمد الراشد
أ. محمد أمين شاكر
أ. فاروق عبد الرزاق الحدبان

د. سلمان عبد الرحمن السلطان
د. فوزي أحمد الذكير
د. صالح السنوسي
د. محمد عبد الرحمن القاضي

يوزع مجاناً ولا يباع

١٤٢٧هـ - ١٤٢٨هـ

٢٠٠٦م - ٢٠٠٧م

طبعة

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر
السعودية . وزارة التربية والتعليم
الرياضيات : للصف الثاني الثانوي : قسم العلوم الطبيعية الفصل الدراسي
الأول - ط ٥ - الرياض .
... ص ... ؛ سم
ردمك : ٩ - ٢٢٢ - ١٩ - ٩٩٦٠ (مجموعة)
٧ - ٢٢٣ - ١٩ - ٩٩٦٠ (ج ١)
١ - الرياضيات - كتب دراسية ٢ - التعليم الثانوي - السعودية -
كتب دراسية أ - العنوان
ديوي ٥١٠,٧١٢ ١٩/٢١٨٦

رقم الإيداع : ١٩/٢١٨٦
ردمك : ٩ - ٢٢٢ - ٩٩٦٠ (مجموعة)
٧ - ٢٢٣ - ١٩ - ٩٩٦٠ (ج ١)

أشرف على الإعداد و الإنتاج



لهذا الكتاب قيمة مهمة وفائدة كبيرة فحافظ عليه واجعل نظافته
تشهد على حسن سلوكك معه

إذا لم تحتفظ بهذا الكتاب في مكتبتك الخاصة في آخر العام للاستفادة
فاجعل مكتبة مدرستك تحتفظ به

موقع الوزارة
www.moe.gov.sa
موقع الإدارة العامة للمناهج
www.moe.gov.sa/curriculum/index.htm
البريد الإلكتروني للإدارة العامة للمناهج
curriculum@moe.gov.sa

حقوق الطبع والنشر محفوظة
لوزارة التربية والتعليم
بالمملكة العربية السعودية

مقدمة

الحمد لله رب العالمين، علم بالقلم، علم الإنسان ما لم يعلم، والصلاة والسلام على من بعثه الله تعالى معلماً فأخرج الناس من الظلمات إلى النور، سيدنا محمد سيد الأولين والآخرين وعلى آله وصحبه أجمعين.

أما بعد: فإننا نقدم لأبنائنا الطلبة في الصف الثاني الثانوي- قسم العلوم الطبيعية- الجزء الأول من كتاب الرياضيات، وفق المنهج الجديد الذي اعتمده وزارة التربية والتعليم، والذي تمت مناقشته في ندوة ضمت ممثلين للجامعات السعودية وعددًا من المربين والباحثين والميدانيين (من معلمين وموجهين) من مناطق مختلفة من المملكة، وذلك خلال المدة (٩-١٠) من جمادى الآخرة لعام ١٤٠٦هـ، جاء هذا الكتاب مبنياً على كتاب الصف الأول الذي بدئ بتدريسه عام ١٤١٤هـ / ١٤١٥هـ الدراسي، وعلى النهج نفسه فزودناه- ما أمكن- بالتدريبات المباشرة وحاولنا ربط المفاهيم والمهارات بحياة الطالب العملية وما يتلقاه من مختلف المواد الدراسية وما في هذا العصر من معطيات تقنية بالإضافة إلى تراثنا المشرق وحضارتنا الإسلامية الزاهرة.

الباب الأول : العمليات الثنائية والزمرة .

الباب الثاني : المصفوفات والمحددات .

الباب الثالث : حساب المثلثات .

الباب الرابع : الأعداد المركبة .

وقد تم عرض ماورد في هذا الكتاب بشكل يساعد الطالب على التعلم الذاتي ، لذا فقد بنيت المعلومات الجديدة على معلومات الطالب السابقة ، وتم إيضاحها من خلال أمثلة متنوعة ، لعلها تساعد الطالب على استيعاب هذه المعلومات ، ونصيحتنا إلى طلابنا أن يجعلوا هذا الكتاب مرجعهم في التعلم والذاكرة ، ونهيب بإخواننا المعلمين أن يوجهوهم إلى ذلك ، وأن يتجنبوا استبدال الملخصات بما في هذا الكتاب ، لأن اعتماد الطالب على الملخصات التي يعدها له غيره - حتى ولو كان معلمه - يورثه المحدودية في التفكير .

أملنا أن تصلنا من إخواننا المعلمين ملحوظاتهم مفصلة - من خلال التطبيق الميداني - شاكرين لهم تعاونهم البناء ، وآخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين وصلى الله على سيدنا محمد وعلى آله وصحبه ومن تبعه باحسان إلى يوم الدين .

الرياض في ٢١ من ذي القعدة ١٤١٣ هـ .

المؤلفون

الباب الأول : العمليات الثنائية والزمرة

٩			
١٠	تمهيد	١ - ١
١٢	العمليات الثنائية	٢ - ١
١٩	الجداول والعمليات الثنائية	٣ - ١
٢٧	خاصة الإبدال	٤ - ١
٢٩	خاصة التجميع	٥ - ١
٣٤	العنصر المحايد	٦ - ١
٣٥	النظير	٧ - ١
٤١	الزمرة وخواصها	٨ - ١
٤٩	الزمر الدائرية	٩ - ١
٦٠	النظام ذو العمليتين الثنائيتين	١٠ - ١

الباب الثاني : المصفوفات والمحددات

٦٥			
٦٦	تمهيد	١ - ٢
٧٤	بعض أنواع المصفوفات المشهورة	٢ - ٢
٧٦	جمع المصفوفات ، وضرب مصفوفة بعدد حقيقي	٣ - ٢
٨٩	ضرب المصفوفات	٤ - ٢
١٠٠	النظير الضربي لمصفوفة	٥ - ٢
١١٠	بعض التطبيقات البسيطة على المصفوفات	٦ - ٢
١١٠	- حل نظام معادلتين من الدرجة الأولى في مجهولين	
١١٣	- تطبيقات متنوعة	
١١٨	استخدام المحددات من الدرجة الثانية والثالثة في حل أنظمة المعادلات الخطية	٧ - ٢

١٣٧	الباب الثالث : حساب المثلثات	
١٣٨ لمحة تاريخية	١ - ٣
١٤٠ مفاهيم أولية	٢ - ٣
١٥٦ الدوال الدائرية	٣ - ٣
١٧٠ تبسيط بعض قيم الدوال الدائرية	٤ - ٣
١٧٩ التمثيل البياني لدالتى الجيب وجيب التمام	٥ - ٣
١٨٣ الدوال المثلثية للزاوية وتطبيقات حساب المثلثات	٦ - ٣
١٨٨ الدوال الدائرية لمجموع زاويتين أو الفرق بينهما	٧ - ٣
١٩٤ الدوال الدائرية لمضاعفات الزوايا	٨ - ٣
١٩٩ قوانين التحويل	٩ - ٣
٢٠٤ المعادلات المثلثية	١٠ - ٣
٢١٤ العلاقة بين قياسات زوايا المثلث وأطوال أضلاعه	١١ - ٣
٢٢٧	الباب الرابع : الأعداد المركبة	
٢٢٨ نبذة تاريخية	١ - ٤
٢٢٩ الحاجة إلى توسيع الأعداد الحقيقية	٢ - ٤
٢٣٠ الأعداد المركبة والعمليات عليها	٣ - ٤
٢٣٥ الخواص الجبرية للأعداد المركبة	٤ - ٤
٢٤٣ جذور المعادلة التربيعية	٥ - ٤
٢٤٩ التمثيل الهندسي للأعداد المركبة	٦ - ٤
٢٦١ الجذور التكعيبية للعدد ١	٧ - ٤

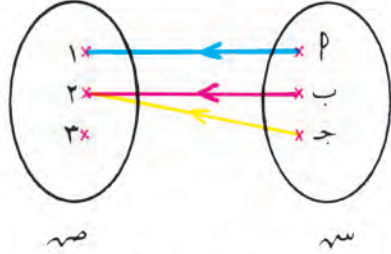
العمليات الثنائية والزُّمرة

- ١ - ١ تمهيد .
- ٢ - ١ العمليات الثنائية .
- ٣ - ١ الجداول والعمليات الثنائية .
- ٤ - ١ خاصة الإبدال .
- ٥ - ١ خاصة التجميع .
- ٦ - ١ العنصر المحايد .
- ٧ - ١ النظير .
- ٨ - ١ الزُّمرة وخواصها .
- ٩ - ١ الزُّمرة الدائرية .
- ١٠ - ١ النظام ذو العمليتين الثنائيتين .

١ - ١ تمهيد

سبق لك التعرف على التطبيقات ، ورأيت أن علاقة كالمثلة سهمياً بالشكل (١ - ١) تدعى

تطبيقاً :



شكل (١ - ١)

مجاله المجموعة $S = \{ p, b, j \}$

ومجاله المقابل المجموعة $S = \{ 1, 2, 3 \}$

وقد سبق أن سمينا المخطط السهمي بيان التطبيق ، ذلك البيان

الذي سنعبّر عنه بالمجموعة $\{ (1, p), (2, b), (3, j) \}$

ومن الواضح لديك أن مدى هذا التطبيق هو المجموعة $\{ 2, 1 \}$

وكذلك فإن : $r : c \rightarrow c$ حيث $r = (س) = 2 + 3$

تطبيق مجاله مجموعة الأعداد الحقيقية c ومجاله المقابل c وكل عنصر s من المجال

يرتبط به مقابله $r = (س) = 2 + 3$ من المجال المقابل . فالعنصر 4 ، مثلاً ،

يرتبط به $r = (4) = 2 \times 4 + 3 = 11$

وبصورة عامة ، فإنك تستطيع تعريف تطبيق بافتراض :

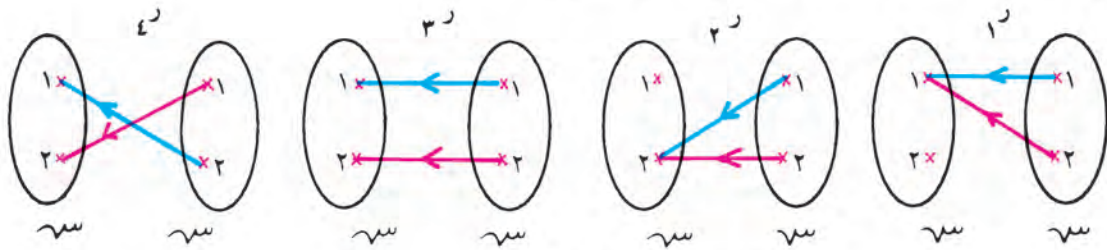
مجموعة تعتبرها مجالاً ، ومجموعة أخرى ، قد تكون الأولى نفسها ، تعتبرها مجالاً مقابلاً ،

وبيان (أو قاعدة للربط بين المجموعتين) على أن يكون :

لكل عنصر من المجال مقابل واحد (وواحد فقط) في المجال المقابل .

فلو أردت مثلاً ، تعريف تطبيق مجاله $S = \{ 1, 2 \}$ ومجاله المقابل S نفسها لحصلت

على ٤ إمكانيات تمثلها المخططات المبينة بالشكل (٢ - ١) .



شكل (٢ - ١)

تعال نبحث عن نمط آخر من التطبيقات :

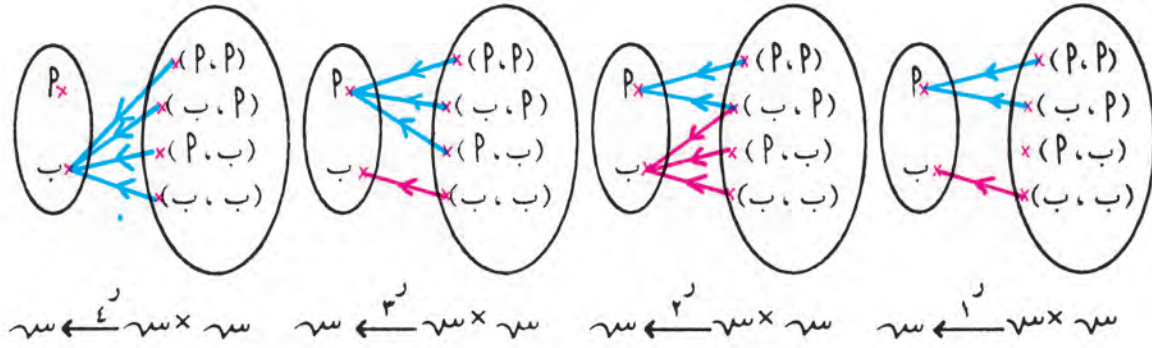
لتكن لدينا المجموعة $S = \{ P, B \}$

فيكون الجداء الديكارتي: $S \times S = \{ (P, P), (P, B), (B, P), (B, B) \}$

فلو أخذت المجموعة $S \times S$ مجالاً لعلاقة مجالها المقابل S ،

فإن بإمكانك الحصول على نماذج من تلك العلاقة ، موضح بعضها بالمخططات المبينة

بالشكل (١ - ٣) :



شكل (١ - ٣)

ولو رجعت إلى تعريف التطبيق وهو :

« لكل عنصر (وهو هنا زوج مرتب) من المجال ،مقابل واحد فقط في المجال المقابل « لوجدت أن كلاً من العلاقتين R_1 ، R_2 تطبيق مجاله $S \times S$ ومجاله المقابل S . بينما العلاقة R_3 ليست تطبيقاً لأن العنصر (P, B) من المجال ليس له مقابل ، وكذلك العلاقة R_4 ليست تطبيقاً لأن العنصر (P, B) له أكثر من مقابل .

تدريب (١ - ١)

أوجد مدى كل من التطبيقين R_1 ، R_2 وحدد نوع كل منهما (شامل ، متباين) . هل يمكن إيجاد تقابل من $S \times S$ إلى S ؟ ولماذا ؟ هل يمكن إيجاد تطبيق متباين ؟ ولماذا ؟ .

١ - ٢ العمليات الثنائية

(١) إذا رجعت إلى ما تعلمته في المراحل السابقة وما درجنا على تسميته بالعمليات الأربعة وهي الجمع والطرح والضرب والقسمة على المجموعات العددية ، فإنك ستذكر أنه :

* بجمع أي عنصرين من مجموعة الأعداد الكلية K نحصل على عنصر من K ، فمثلاً :
 $٥ + ٤ = ٩$ ، أي أن عملية الجمع تُمكننا من أن نقابل كل عددين كليين بعدد كلي نسميه مجموعهما ، فنكتب :

$$(٤, ٥) \longleftarrow ٩ , \text{ وكذلك } (٠, ٢) \longleftarrow ٢$$

وبصورة عامة : لكل $(P, b) \ni K \times K$ مقابل c هو $(P + b)$ ينتمي إلى K
 يتعين بذلك تطبيق مجاله $K \times K$ ومجاله المقابل K والذي هو عملية الجمع المعرفة على K
 والتي تقرون كل زوج مرتب $(P, b) \ni K \times K$ بعنصر وحيد $c = P + b \ni K$.
 وهذا العنصر - كما تعلم - ندعوه : ناتج جمع العددين P و b (أو مجموعهما) . نعبر عن هذا التطبيق (أو هذه العملية) على النحو الآتي :

$$(١-١) \quad \left\{ \begin{array}{l} + : K \times K \longleftarrow K \\ (P, b) \longleftarrow P + b \end{array} \right.$$

* وكذلك فإن التطبيق

$$(٢-١) \quad \left\{ \begin{array}{l} - : K \times K \longleftarrow K \\ (P, b) \longleftarrow P - b \end{array} \right.$$

هو عملية الطرح المعرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة K والتي تقرون كل زوج مرتب $(P, b) \ni K \times K$ بعنصر $c = P - b \ni K$ (وهو ناتج طرح العدد b من العدد P)

*** وبالمثل فإن التطبيق :**

$$(٣-١) \quad \left\{ \begin{array}{l} \times : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ (P, b) \longleftarrow P \times b \end{array} \right.$$

هو عملية الضرب المعرّفة على مجموعة الأعداد النسبية \mathbb{N} والتي تقرن كل زوج مرتب $(P, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ بعنصر وحيد $d \in \mathbb{N}$ $P \times b = d$ (وهو مانسبته ناتج ضرب P و b أو جداء P و b)

*** والتطبيق :**

$$(٤-١) \quad \left\{ \begin{array}{l} \div : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^* \\ (P, b) \longleftarrow P \div b \end{array} \right.$$

(حيث \mathbb{C}^* مجموعة الأعداد الحقيقية \mathbb{C} محذوفاً منها الصفر) هو عملية القسمة المعرّفة على \mathbb{C}^* والتي تقرن كل زوج مرتب $(P, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ بعنصر وحيد $d \in \mathbb{C}^*$ $P \div b = d$ (وهو ناتج قسمة P على b).

أما التطبيق :

$$(٥-١) \quad \left\{ \begin{array}{l} \div : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{N} \\ (P, b) \longleftarrow P \div b \end{array} \right.$$

فهو عملية القسمة على مجموعة الأعداد الطبيعية \mathbb{P} التي تقرن كل زوج مرتب $(P, b) \in \mathbb{P} \times \mathbb{P}$ بعنصر وحيد $d \in \mathbb{P}$ $P \div b = d$. لاحظ هنا أنه لا يمكن اعتبار العملية « \div » تطبيقاً مجاله $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$ ومجاله المقابل \mathbb{P} لأن $\frac{P}{b}$ قد لا ينتمي إلى \mathbb{P} .

فمثلاً :

$$(٥, ٤) \in \mathbb{P} \times \mathbb{P} \text{ بينما } \frac{٤}{٥} \notin \mathbb{P}.$$

لعلك تلاحظ أنه في كل من التطبيقات (العمليات) (١-١) إلى (٤-١) كان المجال هو

الجداء الديكارتي للمجموعة المعروف عليها التطبيق والمجال المقابل هو المجموعة نفسها (ونعبر عن ذلك بقولنا إن جميع نواتج العملية تنتمي إلى المجموعة نفسها) .

أما في التطبيق (١ - ٥) فإنه بالرغم من أن المجال هو الجداء الديكارتي للمجموعة ط إلا أن المجال المقابل ، كما رأينا ، لايساوي ط (ونعبر عن ذلك بقولنا إن نواتج العملية قد لاتتنتمي إلى المجموعة نفسها) .

تدريب (١ - ٢)

عبر عن كل عملية فيما يلي كتطبيق ، على النحو الذي رأيت في هذا البند ، بحيث يكون المجال المقابل ، إن أمكن ، هو المجموعة نفسها .

(١) عملية الجمع على صـ .

(٢) عملية الطرح على ط .

(٣) عملية الضرب على ح

(٤) عملية القسمة على ن* ، حيث ن* = ن - { ٠ } .

(٢) إن التطبيق الجديد الذي تعرّفت عليه من خلال الأمثلة السابقة والذي مجاله الجداء الديكارتي $S \times S$ ومجاله المقابل S ندعوه : عملية ثنائية على S .

فالتطبيق (١ - ١) هو عملية ثنائية على ك

والتطبيق (٢ - ١) هو عملية ثنائية على صـ

والتطبيق (٣ - ١) هو عملية ثنائية على ن

والتطبيق (٤ - ١) هو عملية ثنائية على ح* .

أمّا التطبيق الذي مجاله $S \times S$ ($S \neq \emptyset$) ومجاله المقابل مجموعة أخرى $E \neq S$

فإننا لاندعوه عملية ثنائية على S ، فمثلاً ، التطبيق :

$$\left\{ \begin{array}{l} - : ك \times ك \longleftarrow ص \\ (ب، پ) \longleftarrow ب - پ \end{array} \right.$$

ليس عملية ثنائية على ك .

وعليه نستطيع تقديم تعريف العملية الثنائية :

تعريف (١ - ١) :

إذا كانت S مجموعة غير خالية ، فإننا نسمي أي تطبيق مجاله الجداء الديكارتي $S \times S$ ومجاله المقابل S عملية ثنائية معرفة على S .

تدريب (١ - ٣)

أي العلاقات الواردة في التدريب (١ - ٢) هي عملية ثنائية ؟ ولماذا ؟

(٢) ليس من الضروري أن تكون العملية الثنائية إحدى العمليات الأربع (+ ، - ، \times ، \div) فإذا لم يكن للعملية رمز مستخدم عادة ، فإننا نرمز لها بأحد الرموز * ، Δ ، ∇ ، \odot ، \otimes ، الخ . كما سيظهر في الأمثلة القادمة إن شاء الله .

تعريف (٢ - ١) :

إذا كانت S مجموعة غير خالية وكان * تطبيقاً مجاله $S \times S$ ومجاله المقابل E فإننا نعبّر عن ذلك ، أحياناً ، بالزوج المرتب (S ، *) وندعوه نظاماً ذا عملية وإذا كانت $E \supseteq S$ فإن الزوج (S ، *) يُدعى نظاماً ذا عملية ثنائية أو نظاماً مغلقاً .

يلاحظ من التعريفين (١ - ١) ، (٢ - ١) ما يلي :

(١) تكافؤ العبارات الآتية : (٢) * (وتقرأ العملية نجمة) عملية ثنائية معرفة على S

(ب) (S ، *) نظام ذو عملية ثنائية (ج) (S ، *) نظام مغلق .

(٢) تكافؤ العبارتين : « (S ، *) نظام ذو عملية « و » * تطبيق مجاله $S \times S$ ومجاله

المقابل مجموعة ما ، ع ، قد لا تكون محتواة في S .

مثال (١-١) :

(١) إذا كانت * معرفة على ن كما يلي :

$$\frac{b+p}{q} = b * p$$

فإن (ن ، *) نظام مغلق ، لأن $\frac{b+p}{q} \in ن$ ، لأي عددين p ، b $\in ن$.

(٢) إذا وضعنا المجموعة ك مكان المجموعة ن في (١) فإننا نلاحظ أن (ك ، *) نظام ذو

عملية ولكنه ليس نظاماً مغلقاً ، فمثلاً : $٢ * ٣ = \frac{٣+٢}{٣} = \frac{٥}{٣} \notin ك$.

مثال (٢-١) :

إذا كانت سه = { ١ ، ٢ } فإن :

$$سه^٢ = سه \times سه = \{ (١،١) ، (١،٢) ، (٢،١) ، (٢،٢) \}$$

(١) يمكن تعريف عملية ثنائية \otimes على سه كما يلي :

$$١ \otimes ١ = ١ ، ١ \otimes ٢ = ٢ ، ٢ \otimes ١ = ٢ ، ٢ \otimes ٢ = ١$$

لاحظ أن (سه ، \otimes) نظام مغلق ، كما أن $١ \otimes ٢ \neq ٢ \otimes ١$

(٢) يمكن تعريف عملية ثنائية أخرى على سه ، ولتكن * ، كما يلي :

$$١ * ١ = ١ ، ١ * ٢ = ٢ ، ٢ * ١ = ٢ ، ٢ * ٢ = ١$$

لاحظ أن (سه ، *) نظام مغلق وأن $١ * ٢ = ٢ * ١$

تدريب (٤-١)

عيّن عملية ثنائية على سه في المثال (٢-١) مختلفة عن العمليتين \otimes ، * الواردتين

في ذلك المثال .

مثال (٣-١) :

لنعرف عملية \otimes على ك كما يلي :

$$b \otimes p = b + p$$

إن (ك ، ⊗) نظام مغلق ، لأن $a^2 + b^2 \in K$ ، أي أن مجموع مربعي عددين
كليين هو عدد كلي .

وتجدر الإشارة هنا إلى أن العملية الثنائية ⊗ في هذا المثال معرفة بالقاعدة :

$$P \otimes b = b^2 + a^2$$

بينما العمليتان * ، ⊗ في المثال (١ - ٢) معرفتان بتحديد صورة كل زوج مرتب على حدة .

مثال (١ - ٤) :

لتكن S مجموعة المجموعات الجزئية للمجموعة $\{P, b, a\}$ ، أي أن :

$$S = \{\emptyset, \{P\}, \{b\}, \{a\}, \{P, b\}, \{P, a\}, \{b, a\}, \{P, b, a\}\}$$

وتدعى S مجموعة أجزاء المجموعة $\{P, b, a\}$.

(١) لاحظ أن اتحاد كل عنصرين من عناصر S عنصر ينتمي إلى S أي أن عملية الاتحاد

« \cup » على S هي عملية ثنائية وهذا يعني أن (S, \cup) نظام مغلق ، فمثلاً :

$$\{b\} \cup \emptyset = \{b\}, \{P, a\} \cup \{P, b\} = \{P, a, b\}$$

$$\{P, a, b\} \cup \{a\} = \{P, a, b\}$$

(٢) إذا كانت S = $\{\emptyset, \{P\}, \{b\}, \{a\}, \{P, b\}, \{P, a\}, \{b, a\}, \{P, b, a\}\}$.

وتدعى S مجموعة المجموعات الجزئية الفعلية للمجموعة $\{P, b, a\}$

فإن (S, \cup) نظام غير مغلق ، أي أن « \cup » ليست عملية ثنائية على S لأن

$$\{P, b, a\} \cup \{P, b, a\} = \{P, b, a\} \notin S$$

مثال (١ - ٥) :

إذا كانت $T = \{1, 2, 2, 2, \dots\}$ وعرفنا عملية Δ على T على النحو الآتي :-

لأي عددين $s, v \in T$ فإن :

س Δ ص = القاسم المشترك الأكبر، للعددين س ، ص . فمثلاً :
 $25 \Delta 15 = 5$ ، $28 \Delta 19 = 1$ ، $65 \Delta 17 = 1$ ، وهكذا .. إن (ط ، Δ) نظام مغلق .

تدريب (١ - ٥)

(P) بالنسبة للعملية Δ في المثال (١ - ٥) أكمل مايلي :

$$36 \Delta 63 = \dots ، 1.2 \Delta 17 = \dots$$

(ب) ناقش صحة كلٍّ من العبارتين التاليتين :

- (١) إذا كان (س، *) نظاماً مغلقاً فإن (س، *) نظام ذو عملية .
 (٢) إذا كان (س، *) نظاماً ذا عملية فإن (س، *) نظام مغلق .

تمارين (١ - ١) :

(١) إذا كانت \otimes عملية ثنائية معرفة على صه كما يلي :

$$س \otimes ص = ص^2 + ص^2 - س$$

فأوجد :

$$(١٣ -) \otimes ٧ ، ٧ \otimes (١٣ -) ، ٣ \otimes ٤ ، ٤ \otimes ٣$$

$$(ب) س حيث س \otimes ٣ = ١١$$

(٢) إذا كان س ∇ ص هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين س ، ص \supseteq ط فاحسب قيمة :

$$١٢ \nabla ١٢ ، ٦ \nabla ١٥ ، ١٥ \nabla ٣٦ ، ١٢ \nabla ٣٦$$

هل ∇ عملية ثنائية على ط ؟ ولماذا ؟

(٣) إذا اعتبرنا التعريفين الواردين في التمرين (٢) والمثال (١ - ٥) للعمليات الثنائيتين ∇ ، Δ

على المجموعة ط فاحسب قيمة :

$$٢٢ \nabla (٣ \nabla ١٥) ، (٣ \nabla ٣٦) \nabla ٤ ، ٥٥ \nabla (٥ \Delta ٢٥) ،$$

$$(٣٠ \nabla ٦٦) \Delta (١٠ \nabla ٦٤) ، (٨ \Delta ١٢٨) \nabla (٦٤ \Delta ٢٥٦) .$$

(٤) فيما يلي عمليات على المجموعة $S = \{ 0, 4 \}$. اذكر العمليات الثنائية منها ، معللاً إجابتك :

(أ) $4 \circ 4 = 4$ ، $4 \circ 0 = 0$ ، $0 \circ 4 = 0$ ، $0 \circ 0 = 4$ ، حيث \circ ترمز للعملية على S .

(ب) $4 \circ 4 = 4$ ، $4 \circ 0 = 0$ ، $0 \circ 4 = 0$ ، $0 \circ 0 = 0$

(ج) $4 \circ 4 = 0$ ، $4 \circ 0 = 0$ ، $0 \circ 4 = 0$ ، $0 \circ 0 = 0$

(٥) هل النظام (ك ، -) مغلق؟ ولماذا؟

(٦) عرّف خمس عمليات ثنائية مختلفة على المجموعة $\{ 9, 11 \}$.

٣-١ الجداول والعمليات الثنائية

إذا كانت المجموعة التي عُرِّفت عليها عملية ثنائية تتكون من عدد محدود من العناصر ، فإنه يمكن تمثيل العملية الثنائية بجدول .

٢	١	⊗
٢	١	١
١	١	٢

وبالرجوع إلى المثال (١ - ٢) يمكن أن نمثل العملية الثنائية ⊗

بالجدول الآتي :

لاحظ أن العناصر التي ظهرت في الجدول جميعها تنتمي إلى $S = \{ 1, 2 \}$ التي عُرِّفت عليها العملية الثنائية .

جدول (١ - ١)

مثال (١ - ٦) :

إذا كانت $S = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ وعرّفنا عليها عملية * كما يأتي :

لكل $s, v \in S$ فإن $s * v =$ القاسم المشترك الأكبر للعددين s, v .

فأثبت أن العملية * ثنائية على S .

الحل :

ننظّم الجدول (١ - ٢) الذي سيعطينا القاسم المشترك الأكبر لأي عددين من S .

نلاحظ أن $(S, *)$ نظام مغلق ، حيث إن $S * S \subseteq S$ لكل $S \in S$ ،

إذن $*$ عملية ثنائية على S .

مثال (٧-١) :

٤	٣	٢	١	*
١	١	١	١	١
٢	١	٢	١	٢
١	٣	١	١	٣
٤	١	٢	١	٤

جدول (٢ - ١)

أنشئ جدول عملية النظام $(S, *)$

إذا علمت أن $S = \{ ١, ٢, ٣ \}$ وأنه لكل $P, B \in S$

فإن $P * B = P^B$ ، وهل $(S, *)$ نظام مغلق مع التعليل ؟

الحل :

الجدول (٢ - ١) هو جدول العملية $*$.

وحيث إن الأعداد : $٤ = ٢ * ٢ = ٢^٢$ ،

$٨ = ٢ * ٣ = ٢^٣$ ، $٩ = ٣ * ٣$ ،

$٢٧ = ٣ * ٣ = ٣^٣$ التي ظهرت في الجدول لا تنتمي إلى S .

فإن العملية $*$ ليست ثنائية على S ، أي أن $(S, *)$ نظام غير مغلق . جدول (٢ - ١)

لاحظ أنه يكفي لكون النظام $(S, *)$ غير مغلق ظهور عدد واحد فقط بحيث : $P * B \notin S$

مثال (٨-١) :

$\{ ٢, ١ \}$	$\{ ٢ \}$	$\{ ١ \}$	\emptyset	U
$\{ ٢, ١ \}$	$\{ ٢ \}$	$\{ ١ \}$	\emptyset	\emptyset
$\{ ٢, ١ \}$	$\{ ٢, ١ \}$	$\{ ١ \}$	$\{ ١ \}$	$\{ ١ \}$
$\{ ٢, ١ \}$	$\{ ٢ \}$	$\{ ٢, ١ \}$	$\{ ٢ \}$	$\{ ٢ \}$
$\{ ٢, ١ \}$	$\{ ٢, ١ \}$	$\{ ٢, ١ \}$	$\{ ٢, ١ \}$	$\{ ٢, ١ \}$

جدول (٤ - ١)

إذا كانت $S = \{ ٢, ١ \}$ فإنك تعلم أن مجموعة أجزاء

S هي المجموعة $S = \{ \emptyset, \{ ١ \}, \{ ٢ \}, \{ ٢, ١ \} \}$

يمكنك أن تتحقق من أن عملية الاتحاد هي عملية ثنائية

على S وذلك بإنشاء جدول هذه العملية . حاول ذلك ،

ستحصل على الجدول (٤ - ١) .

تدريب (٦ - ١)

(١) في المثال (١ - ٨) :

(أ) تحقق أنه لأي عنصر $v \in S$ فإن $v \cup \emptyset = \emptyset \cup v = v$

وأن $v \cup v = v$ و $v \cap v = v$

(ب) ضع \cap بدلاً من \cup وأنشئ جدول عملية التقاطع \cap ، ثم بين ما إذا كان (S, \cap) نظاماً مغلقاً أم لا .

(٢) الجدول (١ - ٥) هو جدول العملية * المعرفة على $S = \{ 0, 1, 2, 3 \}$ تحقق من الآتي :

٣	٢	١	٠	*
٣	٢	١	٠	٠
٢	٣	٠	١	١
١	٠	٣	٢	٢
٠	١	٢	٣	٣

جدول (١ - ٥)

(٢) * عملية ثنائية على S

(ب) لأي عنصر $P \in S$ فإن $P * 0 = 0 * P = P$:

كما أن $P * P = P$

(ج) لأي عنصرين $P, b \in S$ فإن $P * b = b * P$:

ماذا تلاحظ عن القطر الذي طرفه * للمربع الذي كتب

فيه الجدول (١ - ٥) ؟ .

مثال (١ - ٩) :

٣	٢	١	٠	⊕
٣	٢	١	٠	٠
٠	٣	٢	١	١
١	٠	٣	٢	٢
٢	١	٠	٣	٣

جدول (١ - ٦)

لنأخذ المجموعة $\{ 0, 1, 2, 3 \}$ ولنعرّف العملية الثنائية \oplus عليها كالآتي :

$$\left. \begin{array}{l} \text{إذا كان } P + b > 4 \\ \text{إذا كان } P + b \leq 4 \end{array} \right\} = b \oplus P$$

كما يمكن تعريف هذه العملية الثنائية على النحو الآتي :

$$b \oplus P = \text{باقي قسمة } P + b \text{ على } 4 .$$

وعادة نرمز للمجموعة $\{ 0, 1, 2, 3 \}$ بالرمز S ويمكن تمثيل هذه العملية بالجدول (١ - ٦) .

مثال (١٠-١) : (جمع الساعات)

إذا كانت الساعة تشير الآن إلى الرابعة فإنه بعد ثلاث ساعات تشير إلى السابعة أي أن :

$$٧ = ٣ \boxplus ٤$$

وإذا كانت تشير إلى التاسعة فإنه بعد خمس ساعات تشير إلى الثانية ، أي أن :

$$٢ = ٥ \boxplus ٩$$

وإذا كانت الساعة الرابعة فإنه بعد ثمان ساعات نجد أن الساعة تشير إلى الثانية عشرة ، أي أن :

$$١٢ = ٨ \boxplus ٤$$

وإذا كانت الساعة الثانية عشرة فإنه بعد ست ساعات نجد الساعة تشير إلى السادسة أي أن :

$$٦ = ٦ \boxplus ١٢$$

وإذا كانت الساعة الثانية عشرة فإنه بعد اثنتي عشرة ساعة نجد أن الساعة تشير كذلك إلى الثانية

$$١٢ = ١٢ \boxplus ١٢$$

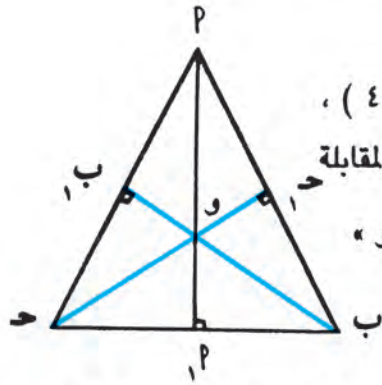
عشرة ، أي أن : وهكذا يمكن الاستمرار بهذه الطريقة ، وسوف نجد أن عملية جمع الساعات عملية ثنائية معرفة

$$\text{على } \mathbb{S}_{١٢} \text{ ، حيث : } \mathbb{S}_{١٢} = \{ ١٢ , ١١ , ١٠ , ٩ , ٨ , ٧ , ٦ , ٥ , ٤ , ٣ , ٢ , ١ \}$$

وهي تخضع للقاعدة الآتية :

$$\left. \begin{array}{l} \text{إذا كان } P + b \geq ١٢ \\ \text{إذا كان } P + b < ١٢ \end{array} \right\} = b \boxplus P$$

مثال (١١-١) : (تطبيق هندسي)



شكل (١ - ٤)

لنأخذ المثلث P ب ح المتطابق الأضلاع الموضح في الشكل (١ - ٤) ،

حيث « و » ملتقى الأعمدة النازلة من رؤوس المثلث على الأضلاع المقابلة

إذا كانت $د_١$ ، $د_٢$ ، $د_٣$ هي عمليات دوران المثلث P ب ح حول « و »

بزوايا : صفر (أو ٣٦٠°) ، ١٢٠° ، ٢٤٠° على الترتيب في

الاتجاه الموجب (أي في عكس اتجاه حركة عقارب الساعة)

فإننا نحصل على الأوضاع الآتية للمثلث P ب ح



لعلك تلاحظ أن كلاً من d_1, d_2, d_3 تطبيق مجاله ومجاله المقابل المجموعة $\{P, B, H\}$ وهي معرفة كالآتي :

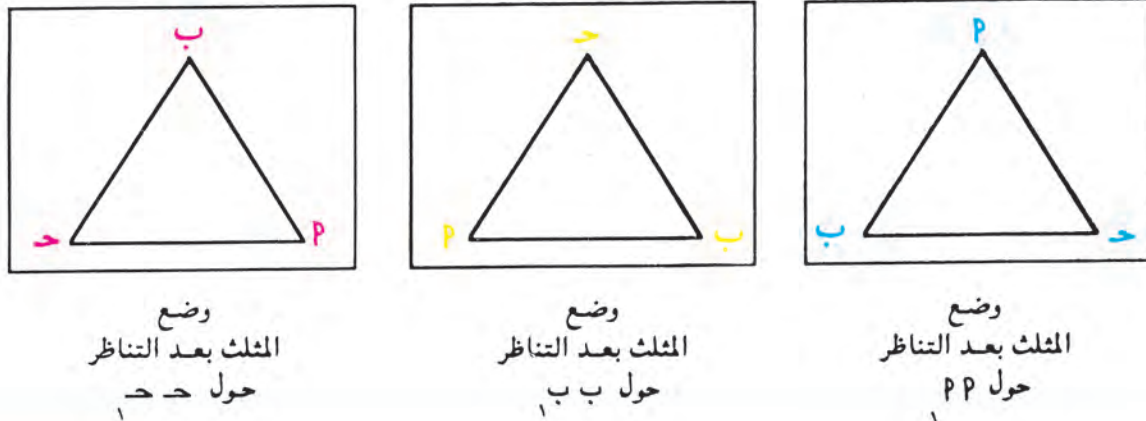
$$\begin{pmatrix} P & B & H \\ H & P & B \end{pmatrix} = d_3, \begin{pmatrix} P & B & H \\ B & H & P \end{pmatrix} = d_2, \begin{pmatrix} P & B & H \\ P & B & H \end{pmatrix} = d_1$$

حيث وضعنا صورة كل عنصر تحته في التطبيق المتعلق به ، فمثلاً :

$$\begin{pmatrix} P & B & H \\ B & H & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & B & H \\ d_2(P) & d_2(B) & d_2(H) \end{pmatrix} = d_2$$

وإذا فرضنا أن d_1, d_2, d_3 تناظرات المثلث P ب ح حول P P ، B B ، H H

على الترتيب فإننا نحصل على الأوضاع الآتية للمثلث P ب ح :



وكذلك فإن L_1, L_2, L_3 هي تطبيقات مجالها ومجالها المقابل المجموعة $\{P, B, C\}$ وهي معرفة كالآتي :

$$\begin{pmatrix} P & B & C \\ C & P & B \end{pmatrix} = L_3, \begin{pmatrix} P & B & C \\ P & B & C \end{pmatrix} = L_2, \begin{pmatrix} P & B & C \\ B & C & P \end{pmatrix} = L_1$$

حيث وضعنا صورة كل عنصر في التطبيق المتعلق به تحته .

إذا فرضنا أن $S = \{L_1, L_2, L_3, P, B, C\}$ فإنه يمكننا أن نمثل عملية تحصيل التطبيقات S على المجموعة S بالجدول الآتي :

L_3	L_2	L_1	P	B	C	S
L_3	L_2	L_1	P	B	C	P
L_3	L_2	L_1	P	B	C	B
L_3	L_2	L_1	P	B	C	C
P	B	C	L_3	L_2	L_1	L_3
P	B	C	L_3	L_2	L_1	L_2
P	B	C	L_3	L_2	L_1	L_1

جدول (١ - ٧)

واضح من الجدول أن العملية S عملية ثنائية على المجموعة S

فيما يلي نوضح طريقة بناء الجدول (١ - ٧) وذلك بحساب $P \circ L_3$:

$$\begin{pmatrix} P & B & C \\ C & P & B \end{pmatrix} = L_3 \circ \begin{pmatrix} P & B & C \\ C & P & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & B & C \\ C & P & B \end{pmatrix}$$

حيث وضعنا صورة كل عنصر تحته في التطبيق $P \circ L_3$ (تذكر أن $P \circ L_3$ هو تحصيل

لتطبيقين L_3, P على الترتيب)

وحيث إن $d_p \circ h = (P)$ ، $d_p \circ j = (P)$ ، $d_p \circ k = (P)$ ، $d_p \circ l = (P)$ ،

$d_p \circ m = (b)$ ، $d_p \circ n = ((b))$ ، $d_p \circ o = (c)$ ، $d_p \circ p = (c)$ ،

$d_p \circ q = (b)$ ، $d_p \circ r = ((c))$ ، $d_p \circ s = (c)$ ، $d_p \circ t = (c)$ ،

إذن : $d_p \circ h = (P)$ ، $d_p \circ j = (P)$ ، $d_p \circ k = (P)$ ، $d_p \circ l = (P)$ ، $d_p \circ m = (b)$ ، $d_p \circ n = ((b))$ ، $d_p \circ o = (c)$ ، $d_p \circ p = (c)$ ، $d_p \circ q = (b)$ ، $d_p \circ r = ((c))$ ، $d_p \circ s = (c)$ ، $d_p \circ t = (c)$ ،

تدريب (٧ - ١)

في المثال (١ - ١١)

(١) أوجد كلاً من الصور الآتية :

$d_p \circ h = (P)$ ، $d_p \circ j = (b)$ ، $d_p \circ k = (c)$ ، ومن ثم أكمل :

$d_p \circ l = (P)$ ، $d_p \circ m = (b)$ ، $d_p \circ n = ((b))$ ، $d_p \circ o = (c)$ ، $d_p \circ p = (c)$ ، $d_p \circ q = (b)$ ، $d_p \circ r = ((c))$ ، $d_p \circ s = (c)$ ، $d_p \circ t = (c)$ ،

(٢) أوجد كلاً من الصور الآتية :

$d_p \circ h = (P)$ ، $d_p \circ j = (b)$ ، $d_p \circ k = (c)$ ، ومن ثم أكمل :

$d_p \circ l = (P)$ ، $d_p \circ m = (b)$ ، $d_p \circ n = ((b))$ ، $d_p \circ o = (c)$ ، $d_p \circ p = (c)$ ، $d_p \circ q = (b)$ ، $d_p \circ r = ((c))$ ، $d_p \circ s = (c)$ ، $d_p \circ t = (c)$ ،

(٣) ماذا تستنتج من (١) ، (٢) ؟

تمارين (٢ - ١)

١ - أي الجداول الآتية يمثل عملية ثنائية على المجموعة { ١ ، ٢ ، ٣ } ولماذا ؟

٣	٢	١	△
٣	٢	١	١
٥	٤	٢	٢
٢	٢	٣	٣

٣	٢	١	*
٢	٢	١	١
١	١	٢	٢
١	١	٢	٣

٣	٢	١	⊗
٣	٢	١	١
١	٢	٣	٢
١	٣	٢	٣

٢ - إذا عرفنا على المجموعة $\mathbb{V} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. العمليتين الثنائيتين \oplus, \odot كالآتي :

$$\left. \begin{array}{l} \text{إذا كان } P + b > 7 \\ \text{إذا كان } P + b \leq 7 \end{array} \right\} = P \oplus b$$

$$P \odot b = \text{باقي قسمة } P \text{ على } 7$$

فمثل هاتين العمليتين في جدولين .

٣ - إذا عرفنا على المجموعة $\mathbb{V} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ العملية الثنائية \oplus كالآتي

$$\left. \begin{array}{l} \text{إذا كان } P + b > 12 \\ \text{إذا كان } P + b \leq 12 \end{array} \right\} = P \oplus b$$

(P) فالمطلوب : مثل هذه العملية في جدول .

(ب) أكتب جدولاً يمثل العملية الثنائية الواردة في المثال (١ - ١٠)

قارن بين الجدولين .

٤ - عرفنا على المجموعة \mathbb{V} العملية الثنائية \odot كالآتي :

$$P \odot b = \text{باقي قسمة } P \text{ على } 12$$

والمطلوب :

(P) مثل هذه العملية في جدول .

(ب) أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية :

$$(1) 2 \odot s = 0 \quad (2) 3 \odot s = 3$$

$$(3) 6 \odot s = 1$$

٥ - لنعتبر العملية الثنائية * المعرفة على المجموعة ح على النحو الآتي :

$$s * s = \frac{1}{4} s$$

(أ) أحسب مايلي :

$$(1) 4 * \frac{1}{2} \quad (2) \frac{6}{5} * \frac{1}{2} \quad (3) \frac{5}{3} * 2 \frac{1}{4}$$

(ب) أثبت أن العملية * ليست تطبيقاً متبايناً .

٦ - لنعبر العملية الثنائية * المعرفة على المجموعة ح على النحو التالي :

$$س * ص = (س - ص)^2$$

(أ) أوجد :

$$(1) \frac{1}{2} * (3 * 2) \quad (2) (2 * 3) * \frac{1}{2}$$

(ب) أثبت أن * ليست عملية ثنائية على المجموعة ط .

٧ - بالرجوع إلى المثال (١ - ١١) أثبت ما يأتي :

$$(1) \frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \frac{1}{3} * \frac{1}{2} \quad (2) \frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \frac{1}{3} * \frac{1}{2} \quad (3) \frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \frac{1}{3} * \frac{1}{2}$$

١ - ٤ خاصة الإبدال :

نلاحظ في عملية الجمع على المجموعة ك أن :

$$٢٥ = ١٧ + ٨ = ٨ + ١٧ ، ٨ = ٣ + ٥ = ٥ + ٣$$

وكذلك بالنسبة لعملية الضرب على ك نلاحظ أن :

$$١٣٦ = ١٧ * ٨ = ٨ * ١٧ ، ١٥ = ٣ * ٥ = ٥ * ٣$$

ووصفة عامة :

$$ب \in ك \quad \text{لكل } p \quad p * ب = ب * p ، p + ب = ب + p$$

أي أنه يمكن المبادلة بين العددين p ، ب في عمليتي الجمع والضرب دون تغيير في ناتج

العملية ، وبصورة عامة :

تعريف (١-٣)

نقول إن العملية الثنائية * على المجموعة S إبدالية (أو تبديلية) إذا كان :

$$P * b = b * P \text{ لكل } P, b \in S$$

وقد نقول إن النظام (S, *) إبدالي إذا كانت * إبدالية .

وتكون العملية * المعرفة على S غير إبدالية إذا أمكن إيجاد عنصرين P, b $\in S$

$$\text{بحيث : } P * b \neq b * P$$

ارجع إلى الأمثلة (١-٢) ، (١-٣) ، (١-٤) ، (١-٥) ، (١-٦) ، (١-٧) ، (١-٨) ، (١-٩) ، (١-١٠) ، (١-١١) . وابتحث عمّا إذا كانت العمليات الواردة في هذه الأمثلة إبدالية أم لا .

لعلك توصلت إلى أن جميع العمليات الثنائية الواردة في هذه الأمثلة إبدالية باستثناء :

العملية الثنائية الأولى في المثال (١-٢) ، والعملية الثنائية في المثال (١-١١) . أما العملية الواردة في المثال (١-٧) فهي ليست إبدالية بالإضافة إلى كونها ليست عملية ثنائية كما أسلفنا ، ذلك لأن :

$$P * b = b * P \neq b^P = b^P \text{ (} P, b \in S \text{)}$$

فمثلاً إذا كان $P = 2$ ، $b = 3$ فإن :

$$P * b = 2 * 3 = 3^2 = 9 \text{ في حين أن } b * P = 3 * 2 = 2^3 = 8$$

تدريب (١-٨)

(١) بيّن هل عملية الطرح المعرفة على ح عملية ثنائية ؟ وهل هي إبدالية ؟

(٢) بيّن هل النظام (ح, *) مغلق ؟ وهل هو إبدالي ؟

وتكون العملية * المعرفة على S غير تجميعية إذا أمكن إيجاد ثلاثة عناصر P, b, c \exists S

$$\text{بحيث : } (b * c) * P \neq c * (b * P)$$

مثال (١٢-١) :

لنعرف العملية الثنائية * على المجموعة S كما يأتي :

$$P * b = b + P - c, \text{ حيث } c \text{ عدد ثابت من } S:$$

واضح أن العدد الناتج $(b + P - c) \in S$ ، لكل $P, b \in S$

وهذا يعني أن * عملية ثنائية على S.

إذا كان $c \in S$ فإن :

$$c * (b + P - c) = c * (P * b)$$

$$= c + (b + P - c) - c = b + P - c$$

(١)

$$= c + P - c + b = b + P - c$$

ومن جهة أخرى

$$(c * b) + P = (c * b) * P$$

$$= (c + b - c) + P = c + b + P - c$$

(٢)

$$= c + P - c + b = b + P - c$$

وبمقارنة (١) ، (٢) نجد أن :

$$(c * b) * P = c * (b * P) \text{ لكل } P, b, c \in S$$

أي أن * عملية ثنائية تجميعية .

مثال (١٣-١) :

أثبت أن النظام (K, \otimes) مغلق وغير إبدالي وغير تجميعي ، إذا علمت أن \otimes معرفة على

K كما يلي :

$$s \otimes s = s^2 + s^2 = 2s^2, \text{ لكل } s \in S$$

الحل :

حيث إنه لكل عددين s, v ، $\exists k$ فإن $(2s + 2v) \in k$
إن (k, \otimes) نظام مغلق

إن \otimes عملية غير إبدالية لأنه عندما تكون $s = 1, v = 2$ نجد :

$$s \otimes v = 1 \otimes 2 = 2 \otimes 1 = 2 \times 1 + 1 \times 2 = 4 = 8 \text{ ، في حين أن :}$$

$$v \otimes s = 2 \otimes 1 = 1 \otimes 2 = 1 \times 2 + 2 \times 1 = 4 = 7$$

إن : $1 \otimes 2 \neq 2 \otimes 1$ ، وعليه فإن (k, \otimes) نظام غير إبدالي .

وبالمثل فإن \otimes عملية غير تجميعية لأنه يجعل $s = 1, v = 2, e = 3$ نجد أن :

$$(s \otimes v) \otimes e = (1 \otimes 2) \otimes 3$$

$$= 2 \times 3 + (1 \otimes 2) \times 3 =$$

$$= 6 + (2 \times 3 + 1 \times 2) \times 3 =$$

$$(1) \quad 25 =$$

$$s \otimes (v \otimes e) = (1 \otimes (2 \otimes 3)) \otimes 3$$

$$= (1 \otimes (2 \otimes 3)) \times 3 + 1 \times 3 =$$

$$= (1 \times 3 + 2 \times 2) \times 3 + 3 =$$

$$(2) \quad 41 =$$

من (1) ، (2) نستنتج أن \otimes عملية غير تجميعية ،

وبالتالي فإن (k, \otimes) نظام غير تجميعي .

تدريب (١ - ٩)

(١) ارجع إلى المثال (١ - ١٣) وأجب على الأسئلة التالية :

(p) أحسب $7 \otimes 5$ ، $5 \otimes 7$ وقارن بين الناتجين .

(ب) أحسب $(1 \otimes 2) \otimes 3$ ، $3 \otimes (1 \otimes 2)$ وقارن بين الناتجين .

(ج) هل ماورد في كل من (p) ، (ب) كافٍ للبرهان على أن العملية الثنائية \otimes غير

إبدالية وغير تجميعية على k ؟ ولماذا ؟

(٢) بين أن النظام (ح، -) غير تجميعي .

(٣) هل (ح، *) ، (÷) نظام تجميعي ؟ ولماذا ؟

مثال (١٤-١) :

إذا عرفنا عملية Δ على المجموعة صـ على النحو الآتي :

لكل $p, b \in \text{صـ}$ فإن $p \Delta b = p^2 + b^2$

فابحث عما إذا كانت Δ إبدالية ؟ تجميعية ؟

الحل :

حيث إن $p \Delta b = p^2 + b^2 = b^2 + p^2 = b \Delta p$ لكل $p, b \in \text{صـ}$

إذن Δ إبدالية . وحيث إنه لكل $p, b, c \in \text{صـ}$ فإن :

$$(p \Delta b) \Delta c = (p^2 + b^2) \Delta c = c^2 + (p^2 + b^2)^2$$

$$= c^2 + p^4 + 2p^2b^2 + b^4$$

$$(1) \quad = c^2 + p^4 + b^4 + 2p^2b^2$$

$$p \Delta (b \Delta c) = p \Delta (b^2 + c^2) = p^2 + (b^2 + c^2)^2$$

$$= p^2 + b^4 + c^4 + 2b^2c^2$$

$$(2) \quad = p^2 + b^4 + c^4 + 2b^2c^2$$

فمن (١) ، (٢) نستنتج أن Δ عملية غير تجميعية ، لأن

$$(p \Delta b) \Delta c \neq p \Delta (b \Delta c)$$

تدريب (١٠-١)

ناقش صحة العبارة الآتية

« ليس من الضروري أن تكون العملية الإبدالية تجميعية ، والعكس صحيح ، أي أنه ليس

من الضروري أن تكون العملية التجميعية إبدالية » للإجابة على ذلك استفد من

المثالين (١١-١) ، (١٤-١)

تمارين (١ - ٣)

(١) اذكر ما إذا كانت كل من العبارات الآتية صائبة أم لا واكتب الصواب إذا كانت خاطئة :

(أ) عملية جمع الساعات عملية ثنائية غير إبدالية .

(ب) عملية جمع الساعات عملية ثنائية تجميعية .

(جـ) عملية الضرب على مجموعة الأعداد الكلية إبدالية وغير تجميعية .

(د) عملية الضرب على مجموعة الأعداد الطبيعية غير تجميعية وإبدالية .

(هـ) الجمع على مجموعة الأعداد الكلية عملية إبدالية وتجميعية .

(و) العملية الثنائية في المثال (١ - ١١) غير إبدالية .

(٢) أكمل الفراغ في الجدول الآتي بحيث تكون العملية الثنائية * على المجموعة

{ ١ ، ٢ ، ٣ } إبدالية .

٣	٢	١	*
٣	٢	١	١
	١		٢
١			٣

(٢) لتكن \otimes عملية ثنائية معرفة على المجموعة ط على النحو الآتي

$$p \otimes (b + p) = b \otimes p .$$

$$(p) \text{ أوجد قيمة } ٢ \otimes (٤ \otimes ٦) .$$

$$(٣ \otimes ٤) \otimes ٦ ، (٥ \otimes ٧) \otimes (٢ \otimes ٤) .$$

(ب) هل العملية الثنائية \otimes إبدالية؟ تجميعية؟ ولماذا؟ .

(٤) إذا كانت \otimes عملية ثنائية على المجموعة ط معرفة على النحو الآتي :

$$p \otimes b = b \otimes p$$

فأجب عما يلي : -

$$(p) \text{ أوجد قيمة } (٢ \otimes ٥) \otimes ٣ ، (٢ \otimes ٢) \otimes ٥ ، (٢ \otimes ٧) \otimes (١ \otimes ٢) ، (٧ \otimes ٢) \otimes (٢ \otimes ١)$$

(ب) هل العملية الثنائية \otimes إبدالية؟ تجميعية؟ ولماذا؟

(٥) إذا كانت \otimes عملية ثنائية معرفة على المجموعة صه على النحو الآتي :-

$$s \otimes (s - s) = s$$

فهل هذه العملية إبدالية؟ تجميعية؟ ولماذا؟

١ - ١ العنصر المحايد :

بدراسة عمليتي الجمع والضرب على المجموعة صه نجد أنه لكل $p \in \text{صه}$ يكون :

$$p = p + ٠ = ٠ + p$$

$$p = p \times ١ = ١ \times p$$

ونلاحظ أنه بجمع الصفر مع العدد p ، فإن الناتج يكون p ، وكذلك بضرب الواحد الصحيح في العدد p ، يكون الناتج p . ولهذا فإن الصفر يسمى عنصراً محايداً لعملية الجمع كما يسمى الواحد عنصراً محايداً لعملية الضرب ويمكن تعميم المفهوم بالتعريف التالي :-

تعريف (١ - ٥) :

العنصر m في المجموعة صه المعرفة عليها عملية ثنائية $*$ يسمى عنصراً محايداً بالنسبة لهذه العملية إذا كان :

$$p = p * m = m * p ، \text{ لكل } p \in \text{صه}$$

مثال (١٥-١) :

إذا اعتبرنا عملية جمع الساعات الموضحة في المثال (١ - ١٠) نلاحظ أنه لأي

$$\text{عدد } P \supseteq \{ 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 \}$$

$$P = P \oplus 12 = 12 \oplus P$$

أي أن : ١٢ هو العنصر المحايد لعملية جمع الساعات .

مثال (١٦-١) :

أثبت أن عملية الطرح على المجموعة \mathbb{Z} ليس لها عنصر محايد .

الحل :

نلاحظ أن الصفر لا يمكن أن يكون عنصراً محايداً لهذه العملية الثنائية لأن :

$$P - 0 = P \text{ في حين أن } P - 0 \neq P \text{ ما لم تكن } P = 0 \text{ صفراً}$$

وإن وجد عنصر محايد ، م مثلاً ، بالنسبة لهذه العملية الثنائية فإنه يجب أن يحقق :

$$P - M = P, P = M - P, \text{ لكل } P \in \mathbb{Z}, \text{ حسب التعريف (١ - ٥) . من المعادلة الأولى نستنتج}$$

$$\text{أن } M = 0 \text{ صفراً ، ومن المعادلة الثانية } M = P$$

حيث P أي عنصر من \mathbb{Z} ، وهذا غير ممكن .

إذن لا يوجد عنصر محايد بالنسبة لهذه العملية الثنائية .

تدريب (١١-١)

(١) ارجع إلى المثال (١ - ٩) وعين العنصر المحايد في \mathbb{Z} بالنسبة للعملية \oplus مستفيداً من

الجدول (١ - ٦) .

(٢) في الجدول (١ - ٥) عين العنصر المحايد في \mathbb{Z} بالنسبة للعملية *

٧ - ١ النظرية :

عند دراستنا لعملية الجمع على المجموعة \mathbb{Z} وجدنا أن لهذه العملية الثنائية عنصراً

محايداً هو الصفر .

ومن المعلوم أن لكل عنصر $P \ni x$ يوجد عنصر $b \in x$ بحيث :

$$P + b = \text{صفرًا} .$$

ومن ذلك نستنتج أن $P - =$

أي أن لكل عنصر في المجموعة x يوجد عنصر آخر في المجموعة x بحيث أن مجموع هذين العنصرين يساوي الصفر الذي هو العنصر المحايد في هذه المجموعة بالنسبة لعملية الجمع .

نسمى العنصر $P -$ في مثالنا هذا نظير العنصر P

وبصورة عامة نعرف العنصر النظير لعنصر آخر بالنسبة لعملية ثنائية بما يأتي :

تعريف (١-٦) :

إذا كان للعملية الثنائية $*$ على المجموعة S عنصر محايد m . وإذا كان $P \ni x$ فإن $(b \in x)$ يسمى نظير (أو معكوس) العنصر P بالنسبة للعملية الثنائية $*$ إذا كان :

$$P * b = m , b * P = m$$

عادة يرمز لنظير P بالرمز P^{-1}

مثال (١٧-١)

إذا أعدنا النظر في المثال (١-٩) فإننا نلاحظ أن الصفر هو العنصر المحايد للعملية \oplus وأن لكل عنصر من عناصر المجموعة x نظير حيث نجد

العنصر	٠	١	٢	٣
نظيره	٠	٣	٢	١

مثال (١٨-١) :

إذا أعدنا النظر في المثال (١-٤) فإننا نلاحظ أن

(١) المجموعة الخالية \emptyset هي العنصر المحايد بالنسبة لعملية الاتحاد . لأنه إذا كانت

ص مجموعة جزئية من المجموعة { P ، ب ، د } فإن :

$$\bar{v} = v \cup \emptyset , v = \emptyset \cup v$$

(٢) إن العنصر المحايد \emptyset هو العنصر الوحيد الذي له نظير إذا فرضنا أن $v \supseteq \bar{v}$ هو نظير العنصر v ، نحصل على :

$$\emptyset = v \cup \bar{v} , \emptyset = \bar{v} \cup v$$

$$\emptyset = \bar{v} = v$$

مثال (١-١٩) :

(١) المجموعة $v = \{ P ، ب ، د \}$ هي العنصر المحايد بالنسبة لعملية التقاطع على مجموعة المجموعات الجزئية للمجموعة v لأنه لأي مجموعة جزئية $v \supseteq \bar{v}$ يتحقق :

$$v = \{ P ، ب ، د \} \cap \bar{v}$$

$$\bar{v} = v \cap \{ P ، ب ، د \}$$

(٢) العنصر المحايد $\{ P ، ب ، د \}$ هو العنصر الوحيد الذي له نظير .

إذا فرضنا أن $v \supseteq \bar{v}$ هو نظير للعنصر v ، فإننا نحصل على :

$$\cdot \{ P ، ب ، د \} = v \cap \bar{v}$$

$$\cdot \{ P ، ب ، د \} = \bar{v} \cap v$$

بما أن v ، \bar{v} مجموعتان جزئيتان من المجموعة $\{ P ، ب ، د \}$.

$$\cdot \{ P ، ب ، د \} = v = \bar{v}$$

مثال (١-٢٠) :

إذا كانت \otimes عملية ثنائية معرفة كما يلي :

$$P \otimes b = \frac{b}{P} , \text{ لكل } P ، b \supseteq C^*$$

فادرس خواص العملية \otimes من حيث :

(١) كونها إبدالية أم لا ، تجميعية أم لا .

(٢) وجود عنصر محايد في $*_C$.

(٣) وجود نظير لكل عنصر في $*_C$.

الحل :

(١) $P \otimes b = b \otimes P = \frac{1}{4} b$. وحيث إن عملية الضرب في $*_C$ إبدالية فإن :

$$P \otimes b = b \otimes P = \frac{1}{4} b \quad \text{وحيث إن } P \otimes b = P \cdot b = \frac{1}{4} b = b \cdot P = b \otimes P$$

أي أن \otimes إبدالية .

$$(١) \quad b \otimes P = \frac{1}{4} b \Rightarrow (b \otimes P) \otimes \frac{1}{4} = \frac{1}{4} (b \otimes P) \Rightarrow (b \otimes P) \otimes \frac{1}{4} = (b \otimes P) \otimes \frac{1}{4}$$
$$(b \otimes P) \otimes \frac{1}{4} = (b \otimes P) \otimes \frac{1}{4} \Rightarrow (b \otimes P) \otimes \frac{1}{4} = (b \otimes P) \otimes \frac{1}{4}$$

$$(٢) \quad b \otimes P = \frac{1}{4} b$$

من (١) ، (٢) ينتج أن :

$$P \otimes (b \otimes P) = (P \otimes b) \otimes P = \frac{1}{4} (b \otimes P) \otimes P = \frac{1}{4} (b \otimes P) \otimes P$$

أي أن \otimes تجميعية .

(٢) لو فرضنا أن $m \in *_C$ عنصر محايد فإن :

$$P = P \otimes m = m \otimes P \quad \text{لكل } P \in *_C$$

وحيث إن \otimes إبدالية فإن المساواة الأولى محققة ، ونكتفي بكتابة

$$P = m \otimes P \quad \text{أو} \quad P = P \otimes m \quad \text{ونبحث عن } m \text{ بحل إحدى هاتين المعادلتين ،}$$

ولنأخذ الأولى مثلاً ، التي تكتب بالصورة :

$$P = m \otimes P \Leftrightarrow P = m \cdot P = \frac{1}{4} m$$

فالعنصر المحايد هو العدد ٢ .

(ولعلك تلاحظ أنه لكل $P \in *_C$ يكون : $P = P \times 2 \times \frac{1}{4} = 2 \times P \times \frac{1}{4}$)

(٢) العناصر المتناظرة :

إذا كان $p^{-1} \in H$ نظيراً للعنصر $p \in H$ فإن :

$$y = p \otimes p^{-1} = p^{-1} \otimes p$$

والمساواة الأولى محققة ، لأن \otimes إبدالية . لذا نكتفي بحل إحدى المعادلتين :

$$y = p \otimes p^{-1} \text{ أو } y = p^{-1} \otimes p$$

لكي نحصل على قيمة p^{-1} ، ولناخذ المعادلة الأولى مثلاً والتي تكتب بالصورة :

$$\frac{x}{p} = p^{-1} \otimes p \iff x = p^{-1} \otimes p \iff \frac{x}{p} = p^{-1}$$

إذن : فلكل عدد حقيقي $p \in H$ نظير بالنسبة للعملية \otimes هو $\frac{x}{p}$

تدريب (١ - ١٢)

(١) في المثال (١ - ٢٠) أوجد :

$$(p) \text{ نظير كل من } \frac{1}{3}, \sqrt{27}, 3 -$$

$$(ب) (3 -) \otimes (5 \otimes 3), 8 \otimes (5 \otimes 3) \otimes 2 - \text{ و قارن الناتجين .}$$

(٢) أعد حل المثال (١ - ٢٠) بعد وضع $*$ مكان \otimes .

(٣) في الجداول (١ - ١) ، (٢ - ١) ، (٤ - ١) ، (٥ - ١) أوجد في كل مرة

العنصر المحايد - إن وجد - ثم ابحث عن العناصر المتناظرة في حالة وجودها .

(٤) إذا كان p^{-1} هو نظير p في النظام (س ، *) فبين أن $p^{-1} \neq \frac{1}{p}$ بالضرورة ؟

تمارين (١ - ٤)

(١) إذا اعتبرنا $\mathbb{Z}_6 = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$ وعرفنا العملية الثنائية \oplus على المجموعة \mathbb{Z}_6 على

النحو الآتي : $a \oplus b =$ باقي قسمة $a + b$ على ٦

فأجب عما يأتي :

(p) أوجد العنصر المحايد للعملية الثنائية \oplus .

- (ب) أوجد نظير كل عنصر من عناصر S بالنسبة للعملية \oplus .
 (ح) حل المعادلات الآتية :

$$(1) \quad 1 = س \oplus 2 \quad (2) \quad 1^{-3} = س \oplus 1$$

$$(3) \quad 0 = س \oplus 4^{-1} \quad (4) \quad 3 = س \oplus 2^{-1}$$

- (2) إذا اعتبرنا $S = \{ 0, 1, 2, 3 \}$ وعرفنا العملية الثنائية \odot عليها على النحو الآتي :
- $$P \odot B = \text{باقي قسمة } P \text{ على } 4$$

فأجب عن الآتي :

- (P) مثل هذه العملية في جدول .
 (ب) أوجد العنصر المحايد بالنسبة لهذه العملية .
 (ح) أوجد نظير كل عنصر إن وجد بالنسبة لهذه العملية .
 (د) أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية :

$$(1) \quad 2 \odot س = 0 \quad (2) \quad 3^{-1} \odot س = 2$$

- (3) في المثال (1 - 11) أوجد العنصر المحايد ومعكوس كل تطبيق من التطبيقات

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20$$

- (4) أوجد عملية على مجموعة S لها عنصر محايد ولا يوجد لأي عنصر من المجموعة S ، باستثناء العنصر المحايد ، نظير .

- (5) (P) أوجد العنصر المحايد بالنسبة للعملية * المعرفة على مجموعة الأعداد الكلية ك كما يلي :

$$P * B = B + P + B$$

- (ب) إذا كانت العملية الثنائية السابقة معرفة ط فهل يوجد لها عنصر محايد ؟

- (6) أثبت أن العنصر المحايد م للعملية الثنائية على مجموعة ما هو نظير نفسه .

١ - ٨ الزمرة وخواصها :

رأينا في البنود السابقة أن بعض الأنظمة قد تكون له خاصة معينة أو أكثر (مثل خاصة : الانغلاق والإبدال والتجميع ووجود العنصر المحايد ووجود نظير لكل عنصر) . ويكتسب النظام أهمية بحسب ما يحققه من خواص ، ولعل من أشهر هذه الأنظمة وأهمها ما يسمى « الزمرة » التي كان لها دور بارز في كشف أسرار جذور كثيرات الحدود في أوائل القرن التاسع عشر الميلادي ، بعد أن ينس علماء الرياضيات من إيجاد قانون عام لحل معادلة الدرجة الخامسة أسوة بقوانين المعادلات من الدرجة الثانية إلى الرابعة . كما أن للزمرة دوراً بارزاً في صياغة قوانين الفيزياء الحديثة .

لنأخذ النظام $(\mathcal{V}, +)$ فنجد أن :

(١) عملية الجمع $+$ على مجموعة الأعداد الصحيحة \mathcal{V} ، عملية ثنائية ، لأنه لكل $p, b \in \mathcal{V}$

$$\text{فإن } p + b \in \mathcal{V} .$$

(٢) كما أن $+$ تحقق خاصة التجميع ، لأنه لكل $p, b, c \in \mathcal{V}$ ، فإن $(p + b) + c = p + (b + c)$

(٣) يوجد عنصر محايد في \mathcal{V} بالنسبة للعلاقة $+$ هو الصفر ، لأنه : لكل $p \in \mathcal{V}$ فإن $0 + p = p = p + 0$

(٤) وكذلك يوجد نظير (معكوس) في \mathcal{V} لكل $p \in \mathcal{V}$ حيث نجد :

$$p^{-1} = -p , \text{ لأن } p + (-p) = (-p) + p = 0$$

نسمي النظام $(\mathcal{V}, +)$ زمرة لتحقيقه للشروط الأربعة السابقة . هذا ويمكن أن نصف النظام

$(\mathcal{V}, +)$ بقولنا إنه نظام مغلق وتجميعي وبه عنصر محايد ولكل عنصر فيه نظير .

تعريف (١ - ٧) :

نقول إن النظام $(\mathcal{S}, *)$ زمرة (أو اختصاراً إن \mathcal{S} -زمرة) إذا كان مغلقاً وتجميعياً

وبه عنصر محايد ولكل عنصر فيه نظير .

وإذا كان $(\mathcal{S}, *)$ نظاماً إبدالياً بالإضافة إلى كونه زمرة قيل إن \mathcal{S} -زمرة إبدالية .

إن (صه، +) زمرة إبدالية ، لأن العملية + إبدالية ، كما نعلم .
 أما النظام (صه، ٠) فليس زمرة لأنه ، بالرغم من كونه مغلقاً وتجميعياً وبه عنصر محايد هو
 العدد ١ ، إلا أن النظير بالنسبة لعملية الضرب « ٠ » غير موجود في صه (باستثناء
 العددين ١ + ، ١ -) . فنظير العدد ٢ ، مثلاً يحقق المعادلة :

$$٢ س = ١$$

وهذه المعادلة لا تتحقق لأي عدد س \in صه .

مثال (١-٢١) :

ادرس الأنظمة الآتية من حيث كونها زمرة إبدالية أم لا :

- (١) (صه، *) (٢) (صه، +) (٣) (ن، ٠) (٤) (ن، *)
 (٥) (ح، +) (٦) (ح، -)

الحل :

باستخدام التعريف (١-٧) نجد أن :

(١) النظام (صه، *) مغلق وتجميعي وإبدالي وبه عنصر محايد هو ١ ولكن لا يوجد فيه نظير

لكل عنصر س \in صه* ، فمثلاً ، نظير ٢ هو $\frac{1}{٢}$ (لأن $١ = \frac{1}{٢} \times ٢$) ولكن $\frac{1}{٢} \notin$ صه* .

إذن (صه، *) ليس زمرة .

(٢) النظام (صه، +) ليس مغلقاً ، فمثلاً ، $٢ + (-٢) = ٠$ ، ولكن $٠ \notin$ صه* لأن صه* ،

$=$ صه - {٠} . إذن (صه، +) ليس زمرة .

(٣) النظام (ن، ٠) ليس زمرة ، لأن الصفر ليس له نظير بالنسبة لعملية الضرب « ٠ »

(٤) النظام (ن، *) مغلق وتجميعي وإبدالي وبه عنصر محايد هو ١ ولكل عنصر $p \in$ ن* ،

نظير ضربي هو $p^{-١} = \frac{1}{p}$ ، لأن $١ = \frac{1}{p} \times p$ ، إذن (ن، *) زمرة إبدالية .

(٥) النظام (ح ، +) مغلق وتجميعي وإبدالي وبه عنصر محايد هو الصفر ولكل عنصر $p \in \mathbb{Z}$ ح

نظير جمعي هو $p^{-1} = -p$ ، لأن $p + (-p) = 0$ ، إذن (ح ، +) زمرة إبدالية .

(٦) النظام (ح ، -) ليس زمرة ، فضلاً عن أن يكون زمرة إبدالية ، لكونه لا يحقق إلا خاصية

الانغلاق فقط من التعريف (١ - ٧) . فمثلاً : خاصة التجميع غير محققة لأن :

$$3 = (4 - 2) - 2 \neq 0 = 4 - (2 - 2)$$

مثال (١ - ٢٢)

بالرجوع إلى المثالين (١ - ٩) ، (١ - ١٠) نجد أن كلاً من النظامين

(صه ، \oplus) ، (سه ، \boxplus) زمرة إبدالية لأن :

النظام (صه ، \oplus) مغلق وإبدالي وبه عنصر محايد هو الصفر ، كما يتضح ذلك من الجدول

(١ - ٦) الممثل للعملية \oplus ، ولكل عنصر فيه نظير حيث نجد

العنصر	٣	٢	١	٠
نظيره	١	٢	٣	٠

وأخيراً العملية \oplus تجميعية لأنه لكل p, b, c ، $c \oplus (b \oplus p) = (c \oplus b) \oplus p$ فإن :

$$c \oplus (b \oplus p) = (c \oplus b) \oplus p$$

باقي قسمة $(b \oplus p) + c$ على ٤ يساوي باقي قسمة $p + (b \oplus c)$ على ٤ .

وبالمثل فإن النظام (سه ، \boxplus) مغلق ، حيث $\text{سه} = \{0, 1, 2, 3, \dots, 12\}$

والعملية \boxplus هي عملية جمع الساعات ، كما أن \boxplus عملية تجميعية لأنه

$$\text{سه} \ni c, b, p \text{ لكل } c \oplus (b \boxplus p) = (c \boxplus b) \boxplus p$$

باقي قسمة $(b \oplus p) + c$ على العدد ١٢ يساوي باقي قسمة $p + (b \oplus c)$ على ١٢

كذلك \boxplus عملية إبدالية ، لأن $p \boxplus b = b \boxplus p$ لكل $p, b \in \text{سه}$.

إذ أن باقي قسمة $p + b$ على ١٢ يساوي باقي قسمة $p + b$ على ١٢ . العنصر المحايد بالنسبة

- للعلمية \oplus هو العدد $12 \in S$ ، أي أن العدد 12 هنا يلعب دور الصفر في S .
وأخيراً لكل $p \in S$ نظير $p^{-1} \in S$ حيث نجد :

العنصر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
نظيره	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

نظرية (١ - ١) :

إذا كان $(S, *)$ نظاماً مغلقاً وكان به عنصر محايد فإن هذا العنصر المحايد وحيد .

البرهان :

نفرض أن m ، m' عنصران محايدان في S بالنسبة للعلمية $*$ فيكون لدينا :

$$m * m' = m' \quad \text{لأن } m \text{ عنصر محايد} \dots \dots (١)$$

$$m * m' = m \quad \text{لأن } m' \text{ عنصر محايد} \dots \dots (٢)$$

من (١) ، (٢) نستنتج أن $m = m'$ وهذا يعني أن العنصر المحايد وحيد .

نظرية (٢ - ١) :

إذا كان النظام $(S, *)$ زمرة فإن لكل $s \in S$ نظير وحيد .

البرهان :

نفرض أن s ، s' ، $s'' \in S$ هما نظيرا s بالنسبة للعلمية $*$ فيكون لدينا :

$$s * s' = s' \quad \text{حيث } m \text{ العنصر المحايد في } S$$

$$s * s' = s' * (s * s'') \quad \text{تعريف النظير}$$

$$= (s * s') * s'' \quad \text{خاصة التجميع}$$

$$= m * s'' \quad \text{لماذا ؟}$$

$$= s'' \quad \text{لماذا ؟}$$

إذن نظير s وحيد حيث وجدنا $s' = s''$.

مثال (٢٣-١) :

إذا كان النظام (س، *) زمرة فاثبت أن للمعادلة :

$$P * S = B, \text{ حيث } P, B \in S \text{ حلاً وحيداً هو:}$$
$$S = P^{-1} * B.$$

الحل :

لا بد لنا من إثبات أمرين أولهما هو أن $P^{-1} * B$ حل للمعادلة وثانيهما أن هذا الحل وحيد .

إن $P^{-1} * B$ حل للمعادلة $P * S = B$ لأنه يحققها حيث نجد :

$$P * (P^{-1} * B) = (P * P^{-1}) * B \text{ خاصة التجميع}$$

$$= B \text{ خاصة النظرير}$$

$$B = P * (P^{-1} * B) \text{ خاصة المحايد}$$

ثانياً : بفرض $S \in S$ حلاً آخر للمعادلة فيجب أن تحقق S المعادلة فيكون :

$$P * S = B \iff P * S = (P * P^{-1}) * B$$

$$\iff P * S = P * (P^{-1} * B)$$

$$\iff S = P^{-1} * (P * S)$$

$$\iff S = B$$

نظرية (٣-١) :

إن عملية تحصيل التطبيقات عملية تجميعية .

البرهان :

نفرض أن R_1, R_2, R_3 هي التطبيقات الآتية :

$$R_1 : S \rightarrow S, R_2 : S \rightarrow S, R_3 : S \rightarrow S$$

(٣) $d \in S$ هو العنصر المحايد للنظام (S, \circ) ، لأنه لكل $s \in S$

فإن : $d \circ s = s \circ d = s$.

(٤) لكل $s \in S$ نظير $s^{-1} \in S$ ، حيث نجد :

s	d	d	d	l	l	l
s^{-1}	d	d	d	l	l	l

(٥) (S, \circ) نظام تجميعي ، لأن عملية تحصيل التطبيقات « \circ » تجميعية ، حسب النظرية (١ - ٣) .

مما تقدم نجد أن (S, \circ) زمرة غير إبدالية .

نظرية (١ - ٤) :

إذا كانت P, b, c عناصر في الزمرة (S, \circ) فإن :

$$(١) \quad P * b = P * c \iff b = c \quad (\text{قاعدة الحذف من اليمين})$$

$$(٢) \quad b * P = c * P \iff b = c \quad (\text{قاعدة الحذف من اليسار})$$

البرهان

$$(١) \quad P * b = P * c \iff P^{-1} * (P * b) = P^{-1} * (P * c) \iff b = c$$

$$\iff P * b = P * c \iff P^{-1} * (P * b) = P^{-1} * (P * c) \iff b = c$$

$$\iff P * b = P * c \iff P^{-1} * (P * b) = P^{-1} * (P * c) \iff b = c$$

$$\iff P * b = P * c \iff P^{-1} * (P * b) = P^{-1} * (P * c) \iff b = c$$

$$\iff P * b = P * c \iff P^{-1} * (P * b) = P^{-1} * (P * c) \iff b = c$$

(٢) يتروك برهانه للطالب كتدريب .

تدريب (١ - ١٣)

(٢) أثبت صحة الفقرة (٢) من النظرية (١ - ٤) .

(ب) أوجد حل المعادلات الآتية في الزمرة (S, \circ) الواردة في المثال (١ - ٢٤)

$$(١) \quad l \circ s = d \quad (٢) \quad s \circ l = l \quad (٣) \quad d^{-1} \circ s = l$$

تمارين (١ - ٥)

في التمارين (١) إلى (١٠) عيّن الأنظمة التي تكون زمرة ، وانكر سبباً واحداً فقط عندما لا يكون النظام زمرة :

$$(١) \quad (+, \{1, -1\})$$

$$(٢) \quad (0, \{1, -1\})$$

$$(٣) \quad (+, \mathbb{R}) \text{ ، حيث } \mathbb{R} \text{ مجموعة الأعداد الزوجية .}$$

$$(٤) \quad (\cap, \mathbb{R}) \text{ ، حيث } \mathbb{R} \text{ مجموعة أجزاء المجموعة } \{P, B, C\}$$

$$(٥) \quad (+, \{0\})$$

$$(٦) \quad (\odot, \mathbb{R}^*) \text{ ، حيث } \mathbb{R}^* = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ ، والعملية } \odot \text{ معرفة كما يلي :}$$

$$P \odot B = \text{باقي قسمة } P \text{ على } B \text{ لكل } P, B \in \mathbb{R}^*$$

$$(٧) \quad (\odot, \mathbb{R}) \text{ ، حيث } \mathbb{R} = \{1, 3, 7, 9\} \text{ ، } \odot \text{ معرفة على } \mathbb{R} \text{ كما يلي}$$

$$P \odot B = \text{باقي قسمة } P \text{ على } B \text{ لكل } P, B \in \mathbb{R} .$$

$$(٨) \quad (\oplus, \mathbb{R}) \text{ ، حيث } \mathbb{R} = \{0, 2, 4, 6, 8\} \text{ ، } \oplus \text{ معرفة عليها كما يلي :}$$

$$P \oplus B = \text{باقي قسمة } P+B \text{ على } 10 \text{ لكل } P, B \in \mathbb{R} .$$

$$(٩) \quad (\cdot, \mathbb{R}) \text{ ، حيث } \mathbb{R} = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\} \text{ ، } \cdot \text{ معرفة عليها كما يلي}$$

$$P \cdot B = P \text{ لكل } P, B \in \mathbb{R}$$

$$(١٠) \quad (\cup, \mathbb{R}) \text{ ، حيث } \mathbb{R} \text{ مجموعة أجزاء المجموعة } \{P, B, C\} .$$

$$(١١) \quad \text{أثبت أن كلاً من النظامين } (N, +) \text{ ، } (C, *) \text{ زمرة إبدالية .}$$

$$(١٢) \quad \text{ناقش ما إذا كان كل من النظامين } (N, -) \text{ ، } (C, +) \text{ زمرة أم لا .}$$

$$(١٣) \quad \text{إذا كان } (S, *) \text{ زمرة فاثبت أن لكل معادلة :}$$

$$S * P = B \text{ ، حيث } P, B \in S \text{ حل وحيد في } S \text{ هو :}$$

$$S = B^{-1} * P$$

١ - ٩ الزمر الدائرية :

لتكن $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ ، حيث n عدد صحيح موجب .

تسمى \mathbb{Z}_n مجموعة الأعداد الصحيحة مقياس n

أولاً : لنعرف عملية جمع ، نرمز لها بالرمز \oplus ، على المجموعة \mathbb{Z}_n كما يلي :

$$p \oplus b = \text{باقي قسمة } p + b \text{ على } n \text{ لكل } p, b \in \mathbb{Z}_n$$

نظرية (١ - ٥) :

إن النظام (\mathbb{Z}_n, \oplus) زمرة إبدالية .

البرهان

(١) (\mathbb{Z}_n, \oplus) نظام مغلق ، لأنه لكل $p, b \in \mathbb{Z}_n$ فإن باقي قسمة $p + b$ على n هو أحد

الأعداد : $0, 1, 2, \dots, n-1$ وهذا يعني أن $p \oplus b \in \mathbb{Z}_n$

(٢) (\mathbb{Z}_n, \oplus) نظام تجميعي لأنه لكل $p, b, c \in \mathbb{Z}_n$ فإن :

باقي قسمة $(p + b) + c$ على n يساوي باقي قسمة $p + (b + c)$ على n وهذا

$$\text{يعني أن : } (p \oplus b) \oplus c = p \oplus (b \oplus c)$$

(٣) (\mathbb{Z}_n, \oplus) نظام إبدالي لأنه لكل $p, b \in \mathbb{Z}_n$ فإن :

باقي قسمة $p + b$ على n يساوي باقي قسمة $b + p$ على n ، وهذا يعني أن :

$$p \oplus b = b \oplus p$$

(٤) (\mathbb{Z}_n, \oplus) به عنصر محايد جمعي هو الصفر لأنه : لكل $p \in \mathbb{Z}_n$ فإن : باقي قسمة

$(0 + p)$ على n يساوي باقي قسمة p على n أي أن : $0 \oplus p = p$ (لاحظ أن

$$0 \oplus p = p \oplus 0 \text{ . (إبدالية)}$$

(٥) لكل $p \in \mathbb{Z}_n$ نظير جمعي بالنسبة للعملية \oplus هو $1-p$ لأن $p - n = 1-p$ لأن :

$$p \oplus (1-p) = \text{باقي قسمة } (p + (1-p)) \text{ على } n$$

$$= \text{باقي قسمة } n \text{ على } n$$

$$= 0 \text{ . (لا تنس أن } 1-p \oplus p = p \oplus 1-p \text{ (لماذا؟) .)}$$

ثانياً : لنعرف عملية ضرب ، نرمز لها بالرمز \odot ، على المجموعة \mathbb{Z}_n كما يلي :
 \odot \mathbb{Z}_n = باقي قسمة $\cdot P$. ب على \mathbb{Z}_n لكل P ، ب $\in \mathbb{Z}_n$.

نظرية (١-٦) :

إن النظام (\mathbb{Z}_n, \odot) مغلوق وتجميعي وإبدالوي وبه عنصر محايد ضربي هو العدد ١ عندما $n > 2$.

البرهان

برهان هذه النظرية يشبه تماماً برهان النظرية (١-٥) . لذا يترك كتمرين للطالب .

مثال (١-٢٥)

(١) في الزمرة $(\mathbb{Z}_{11}, \oplus)$ عين (P) المحايد الجمعي (ب) نظير كل عنصر .
 (٢) في النظام (\mathbb{Z}_8, \odot) عين (P) المحايد الضربي (ب) أثبت أنه لا يوجد نظير ضربي للعنصر $2 \in \mathbb{Z}_8$ ، بينما يوجد نظير ضربي للعنصر $3 \in \mathbb{Z}_8$
 الحل :

(١) (P) المحايد الجمعي في النظام $(\mathbb{Z}_{11}, \oplus)$ هو الصفر ، حسب النظرية (١-٥)

العنصر	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
نظيره	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠

(٢) (P) المحايد الضربي هو العدد ١ ، حسب النظرية (١-٦)

(ب) لنفرض أن النظير الضربي للعنصر ٢ هو s فيكون :

$$2 \odot 2 = 1 \quad \odot \quad s = 1$$

ويجعل s تأخذ القيم : ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، على الترتيب نجد

$$2 \odot 2 = 4 \neq 1, \quad 2 \odot 3 = 6 \neq 1, \quad 2 \odot 4 = 8 \neq 1, \quad 2 \odot 5 = 10 \neq 1, \quad 2 \odot 6 = 12 \equiv 4 \neq 1, \quad 2 \odot 7 = 14 \equiv 6 \neq 1, \quad 2 \odot 8 = 16 \equiv 8 \neq 1, \quad 2 \odot 9 = 18 \equiv 10 \neq 1, \quad 2 \odot 10 = 20 \equiv 2 \neq 1$$

$$2 \odot 2 = 4 \neq 1, \quad 2 \odot 3 = 6 \neq 1, \quad 2 \odot 4 = 8 \neq 1, \quad 2 \odot 5 = 10 \neq 1, \quad 2 \odot 6 = 12 \equiv 4 \neq 1, \quad 2 \odot 7 = 14 \equiv 6 \neq 1, \quad 2 \odot 8 = 16 \equiv 8 \neq 1, \quad 2 \odot 9 = 18 \equiv 10 \neq 1, \quad 2 \odot 10 = 20 \equiv 2 \neq 1$$

إذن لا يوجد حل للمعادلة $2 \odot s = 1$ في \mathbb{S}_8 وبالتالي فإنه لا يوجد نظير ضربى للعنصر 2 .

بفرض أن النظرير الضربى للعنصر 3 هو s يكون :

$$3 \odot 3 = 1 \quad \odot \quad 3 = 3^{-1} \quad \odot \quad s = 1$$

وبحل هذه المعادلة في \mathbb{S}_8 نجد أن : $s = 3$ تحقق المعادلة لأن $3 \odot 3 = 1$ باقى
قسمة $3 \times 3 = 9$ على $8 = 1$ وهذا يعنى أن $3 = 3^{-1}$.

تدريب (1 - 14)

(1) نقول عن عددين صحيحين p ، b إنهما أوليان فيما بينهما إذا كان القاسم المشترك الأكبر لهما هو العدد 1 ، ونعبر عن ذلك بالصورة : $(p, b) = 1$ في النظام (\mathbb{S}_n, \odot) عيّن الأعداد الأولية بالنسبة للعدد 8 ، وتأكد أنه عندما يكون $(p, 8) = 1$ فإن $p \in \mathbb{S}_8$ له نظير ضربى ، وعندما يكون $(p, 8) \neq 1$ فإن p ليس له نظير ضربى في \mathbb{S}_8 .

(2) تأكد أن (\mathbb{S}_8, \odot) زمرة ، حيث $\mathbb{S}_8 = \{1, 3, 5, 7\} \subset \mathbb{S}_8$

تعريف (1 - 8) :

إذا كان $(\mathbb{S}_n, *)$ زمرة وكان $s \in \mathbb{S}_n$ ، n عدد طبيعى فإننا نعرّف القوى الصحيحة بالنسبة للعملية $*$ لكل من s ، s^{-1} كما يلي :

$$(1) \quad s^n = \underbrace{s * s * \dots * s}_n \quad (s \text{ مكررة } n \text{ من المرات})$$

$$(2) \quad s^{-n} = \underbrace{(s^{-1}) * (s^{-1}) * \dots * (s^{-1})}_n \quad (s^{-1} \text{ مكررة } n \text{ من المرات})$$

$$(3) \quad s^0 = 1 \quad \text{حيث } 1 \text{ العنصر المحايد في الزمرة } \mathbb{S}_n .$$

مثال (1 - 26) :

(1) تحقق من أن النظام (\mathbb{S}_6, \odot) زمرة إبدالية

(2) احسب : (P) 2^{-1} (ب) 3^{-2} (ج) 4^{-2}

(د) 3^{-1} (هـ) 2^{-4}

الحل :

(١) إن الجدول (٨ - ١) يمثل عملية الضرب \odot ومنه يتبين أن النظام (ص٠* ، \odot) مغلق وعنصره المحايد ١ ، ولكل عنصر فيه نظير حيث نجد:

٤	٣	٢	١	\odot
٤	٣	٢	١	١
٣	١	٤	٢	٢
٢	٤	١	٣	٣
١	٢	٣	٤	٤

٤	٣	٢	١	العنصر
٤	٢	٣	١	نظيره

أما خاصة التجميع فمحققة ، حسب النظرية (١ - ٦) وأخيراً خاصة الإبدال محققة ، حسب النظرية (١ - ٦) كما يمكن التحقق

من خاصة الإبدال من ملاحظة تماثل العناصر حول قطر الجدول (٨ - ١) . جدول (٨ - ١)

إذن (ص٠* ، \odot) زمرة إبدالية .

$$(٢) \quad (P) \quad ٢ = ٢ \odot ٢ \odot ٢ \odot ٢ \quad \text{تعريف (٨ - ١)}$$

$$\text{خاصة التجميع} \quad (٢ \odot ٢) \odot (٢ \odot ٢) =$$

$$= ٤ \odot ٤ \quad \text{تعريف } \odot \quad \text{أو من الجدول (٨ - ١)}$$

$$= ١ \quad \text{لماذا؟}$$

$$\text{وبالمثل : (ب) } ٣ = ٣ \odot ٣ \odot ٣$$

$$= (٣ \odot ٣) \odot (٣ \odot ٣) = ٢ = ٢$$

$$(ح) \quad ٤ = ٤ \odot ٤ \odot ٤ = ٤ \odot (٤ \odot ٤) = ٤ \odot ٤ = ١ = ٤$$

$$(د) \quad ١ = ٣ \quad \text{تعريف (٨ - ١)}$$

$$(هـ) \quad ٤^{-٢} = ١^{-٢} \odot ١^{-٢} \odot ١^{-٢} \odot ١^{-٢} \quad \text{تعريف (٨ - ١)}$$

$$= ٣ \odot ٣ \odot ٣ \odot ٣ \quad \text{لأن } ١^{-٢} = ٣$$

$$= ٤ \odot ٤ = ٣ \odot ٣ = ٤$$

$$= ١$$

تعريف (١-٩) :

نقول إن الزمرة $(S, *)$ منتهية إذا كانت S مجموعة منتهية ، أما إذا كانت S مجموعة غير منتهية فنقول إن $(S, *)$ زمرة غير منتهية .
وعندما تكون S زمرة منتهية فإننا نرمز لعدد عناصرها بالرمز $|S|$ ونسميه رتبة الزمرة .

وحيث إن أي زمرة منتهية $(S, *)$ هي مجموعة غير خالية لوجود العنصر المحايد فيها فإن رتبها $|S| = ١$. فمثلاً :

$$\text{رتبة الزمرة } (\oplus, \mathbb{Z}_n) = |\mathbb{Z}_n| = n$$

$$\text{رتبة الزمرة } (\odot, \mathbb{Z}_n^*) = |\mathbb{Z}_n^*| = \phi(n) \text{ ، لاحظ أن } \mathbb{Z}_n^* = \{0\}$$

$$\text{رتبة الزمرة } (S, *) = ٥ \text{ الواردة في المثال (١-٢٤) } = |S| = ٦$$

وبالرجوع إلى المثال (١-٢٦) نلاحظ أن الزمرة $(\mathbb{Z}_6, *)$ يمكن الحصول على جميع عناصرها من قوى العنصر ٢ وذلك على النحو الآتي :

$$١٢ = ٢ = ٢ \odot ٢ = ٢٢ ، ٤ = ٢ \odot ٢٢ = ٢٢ ، ٤ = ٢ \odot ٤ = ٢ \odot ٢٢ = ٢٢ ، ٣ = ٢ \odot ٤ = ٢ \odot ٢٢ = ٢٢$$

$$٤٢ = ٢ \odot ٢٢ = ٢ \odot ٢٢ = ٢٢$$

$$\text{من الواضح أن : } \{١٢, ٢٢, ٢٢, ٢٢\} = \{١, ٣, ٤, ٢\} = \mathbb{Z}_6^*$$

نقول في هذه الحالة إن العنصر ٢ مولّد للزمرة \mathbb{Z}_6^* (أو ٢ يولّد الزمرة \mathbb{Z}_6^*)
ونستخدم الرمز $\langle ٢ \rangle$ للدلالة على المجموعة التي تولدها قوى العدد ٢ ، أي أن :

$$\langle ٢ \rangle = \{١٢, ٢٢, ٢٢, ٢٢\} = \{١, ٣, ٤, ٢\} = \mathbb{Z}_6^*$$

لاحظ أن القوى الأخرى للعدد ٢ لا ينشأ عنها عناصر جديدة في \mathbb{Z}_6^* فمثلاً :

$$٦٢ = ٢ \odot ٢٢ = ٢٢ \odot ١ = ٤ = ٤$$

لنأخذ $٤ \in \mathbb{Z}_6^*$ ونحسب $\langle ٤ \rangle$ فنجد :

$$\langle ٤ \rangle = \{٤, ٢٤, ٣٤, ٤٤\} = \{١, ٤, ١, ٤\}$$

$$\mathbb{Z}_6^* \neq \{٤, ١\}$$

إذن العنصر ε لا يولد الزمرة \mathbb{Z}_6 . *

وبصفة عامة إذا كانت $(\mathbb{Z}_6, *)$ زمرة رتبتهما n وكان $s \in \mathbb{Z}_6$ فإن :

$\langle s \rangle = \{ s, s^2, s^3, \dots, s^m = e \}$ ، حيث m المحايد في \mathbb{Z}_6 ، $r \geq n$. وفي الحالة التي يكون فيها $\langle s \rangle = \mathbb{Z}_6$ نقول إن s مولد للزمرة \mathbb{Z}_6 .

تعريف (١-١٠) :

نقول إن الزمرة $(\mathbb{Z}_6, *)$ دائرية إذا وُجد بها عنصر واحد على الأقل يولدها (أي إذا وجد بها عنصر $s \in \mathbb{Z}_6$ بحيث $\langle s \rangle = \mathbb{Z}_6$) .

مثال (١-٢٧) :

أثبت أن (\mathbb{Z}_6, \oplus) زمرة دائرية وعين جميع مولداتها .

الحل :

إن (\mathbb{Z}_6, \oplus) زمرة إبدالية ، حسب النظرية (١-٥) . لذا يبقى إثبات أن \mathbb{Z}_6 زمرة دائرية .

نعلم أن $\mathbb{Z}_6 = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$.

إن : $\langle 0 \rangle = \{ 0 \} \neq \mathbb{Z}_6$ ،

$\langle 1 \rangle = \{ 1, 1^2, 1^3, 1^4, 1^5, 1^6 \}$

$= \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$ (تذكر أن $1^3 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 3$)

$\mathbb{Z}_6 =$

إذن العنصر 1 يولد الزمرة \mathbb{Z}_6 وبالتالي فإن \mathbb{Z}_6 زمرة دائرية .

$\langle 2 \rangle = \{ 2, 2^2, 2^3 \} = \{ 2, 4, 0 \} \neq \mathbb{Z}_6$.

$\langle 3 \rangle = \{ 3, 3^2 \} = \{ 3, 0 \} \neq \mathbb{Z}_6$

$\langle 4 \rangle = \{ 4, 4^2, 4^3 \} = \{ 4, 2, 0 \} \neq \mathbb{Z}_6$

$$\{ ٦٥, ٥٥, ٤٥, ٣٥, ٢٥, ٥ \} = \langle ٥ \rangle$$

$$\{ ٠, ١, ٢, ٣, ٤, ٥ \} =$$

$$\cdot \text{ص} = \langle ١ \rangle =$$

إذن مولدات الزمرة ص هما العنصران ١ ، ٥ فقط .

مثال (٢٨-١) :

في المثال (٢٧-١) ، أثبت أن النظام $(\oplus, \langle ٢ \rangle)$ زمرة ، حيث $\langle ٢ \rangle \supset \text{ص}$

والعملية \oplus هي نفسها عملية الجمع المعرفة على ص .

الحل :

٤	٢	٠	\oplus
٤	٢	٠	٠
٠	٤	٢	٢
٢	٠	٤	٤

من الجدول (٩-١) نستنتج أن :

(١) $(\oplus, \langle ٢ \rangle)$ نظام مغلق .

(٢) المحايد الجمعي وهو الصفر موجود في $\langle ٢ \rangle$.

(٣) لكل عنصر في $\langle ٢ \rangle$ نظير جمعي ، حيث :

٤	٢	٠	العنصر
٢	٤	٠	نظيره

جدول (٩-١)

(٤) خاصة التجميع محققة ، لأن \oplus عملية تجميعية .

إذن $(\oplus, \langle ٢ \rangle)$ زمرة . وحيث إن $\langle ٢ \rangle \supset \text{ص}$ فإننا نقول :

إن $\langle ٢ \rangle$ زمرة جزئية من الزمرة ص

وبصفة عامة نقدم التعريف الآتي :

تعريف (١١-١) :

إذا كانت $(\text{ص}, *)$ زمرة وكانت ص مجموعة جزئية غير خالية من ص بحيث يكون $(\text{ص}, *)$

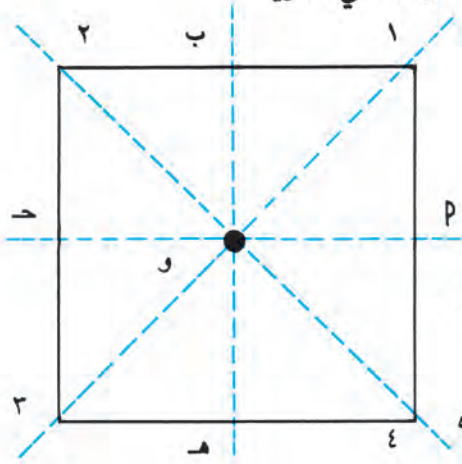
زمرة فإن ص تسمى زمرة جزئية من ص ونرمز لذلك بالرمز $\text{ص} \geq \text{ص}$ (ونقرأه ص

زمرة جزئية من ص) .

تدريب (١ - ١٥)

في المثال (١ - ٢٧) أثبت أن $\langle ٣ \rangle \cong \mathbb{Z}_٣$ رتبها ٢ وهل هي دائرية؟

مثال (١ - ٢٩) :



شكل (١ - ٥)

انظر إلى المربع المبين في الشكل (١ - ٥)

حيث رُقمت رؤوسه بالأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ،

وُنصفت أضلعه بالنقاط P ، ب ، ح ، هـ .

(P) سندرس أولاً مجموعة الدورانات في مستوى المربع

حول مركزه « و » التي تحوّل المربع إلى نفسه :

نعبّر عن الدوران الموجب (أي الدوران في عكس اتجاه

عقارب الساعة) بزاوية ٩٠ بالصورة

$$\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ \\ ٤ & ٣ & ٢ & ١ \end{pmatrix} = ١د$$

لاحظ أن ١د تطبيق تقابل مجاله = مجاله المقابل = { ٤ ، ٣ ، ٢ ، ١ } وهو يحوّل الرأس ١

إلى الرأس ٢ والرأس ٢ إلى الرأس ٣ والرأس ٣ إلى الرأس ٤ والرأس ٤ إلى الرأس ١ .

ويكون الدوران بزاوية ١٨٠ في الاتجاه الموجب هو دوران موجب بزاوية ٩٠ يتبعه دوران موجب

آخر بزاوية ٩٠ ، أي أن الدوران بزاوية ١٨٠ والذي نرمز له بالرمز ٣د هو المحصلة :

$$\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ \\ ٢ & ١ & ٤ & ٣ \end{pmatrix} = ١د \circ ١د = ٣د$$

وبالمثل يكون الدوران بزاوية ٢٧٠ هو :

$$\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ \\ ٣ & ٢ & ١ & ٤ \end{pmatrix} = ٣د \circ ١د = ١د \circ ١د = ١د \circ ١د = ٣د$$

أما الدوران بزاوية ٣٦٠ فهو :

$$\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ \\ ٤ & ٣ & ٢ & ١ \end{pmatrix} = ٣د \circ ١د = ٤د$$

وهذا الدوران يعيد المربع إلى وضعه الأصلي ، بعبارة أخرى فإن :

الدوران d_4 لا يغيّر وضع المربع

(ب) إذا كانت d_4, d_6, d_7, d_8 تمثل تناظرات (انعكاسات) المربع حول محاور تناظره : P, b, h ، القطر الموصل بين الرأس ١ والرأس ٣ والقطر الموصل بين الرأس ٢ والرأس ٤ على الترتيب فإن :

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = d_6 \quad , \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = d_4$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = d_8 \quad , \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = d_7$$

وجميع هذه التناظرات هي تطبيقات تقابل مجال كل منها = مجاله المقابل = { ٤ ، ٣ ، ٢ ، ١ }

كما أن : $d_4 = d_6 = d_7 = d_8 = d_8$ (تأكد من ذلك) .

٨ ^d	٧ ^d	٦ ^d	٥ ^d	٤ ^d	٣ ^d	٢ ^d	١ ^d	٥
٥ ^d	٦ ^d	٨ ^d	٧ ^d	١ ^d	٤ ^d	٣ ^d	٢ ^d	١ ^d
٧ ^d	٨ ^d	٥ ^d	٦ ^d	٢ ^d	١ ^d	٤ ^d	٣ ^d	٢ ^d
٦ ^d	٥ ^d	٧ ^d	٨ ^d	٣ ^d	٢ ^d	١ ^d	٤ ^d	٣ ^d
٨ ^d	٧ ^d	٦ ^d	٥ ^d	٤ ^d	٣ ^d	٢ ^d	١ ^d	٤ ^d
١ ^d	٣ ^d	٢ ^d	٤ ^d	٥ ^d	٧ ^d	٦ ^d	٨ ^d	٥ ^d
٣ ^d	١ ^d	٤ ^d	٢ ^d	٦ ^d	٨ ^d	٥ ^d	٧ ^d	٦ ^d
٢ ^d	٤ ^d	٣ ^d	١ ^d	٧ ^d	٦ ^d	٨ ^d	٥ ^d	٧ ^d
٤ ^d	٢ ^d	١ ^d	٣ ^d	٨ ^d	٥ ^d	٧ ^d	٦ ^d	٨ ^d

جدول (١ - ١٠)

ويوضع $s_5 = \{ d_1, d_2, d_3, \dots, d_8 \}$

فإن $(s_5, 5)$ زمرة غير إبدالية . حيث

يتبين من الجدول (١ - ١٠) أن :

$(s_5, 5)$ نظام مغلق وأنه غير إبدالي

لعدم تناظر العناصر حول قطر الجدول

وأن به عنصراً محايداً هو d_1 وأن لكل

عنصر فيه نظير حيث :

العنصر	١ ^د	٢ ^د	٣ ^د	٤ ^د	٥ ^د	٦ ^د	٧ ^د	٨ ^د
نظيره	٣ ^د	٢ ^د	١ ^د	٤ ^د	٥ ^د	٦ ^د	٧ ^د	٨ ^د

أما خاصة التجميع فهي محققة لأن عملية تحصيل التطبيقات « ٥ » تجميعية ، نظرية (١-٣)

تدريب (١-١٦)

في المثال (١-٢٩) أجب عما يلي :-

- (١) أثبت أن (س، هـ) زمرة غير دائرية رتبها ٨ .
- (٢) أثبت أن (< ١^د > ، هـ) زمرة دائرية وأوجد رتبها .
- (٣) أوجد ثلاث زمر جزئية مختلفة من الزمرة س، هـ .
- (٤) حل المعادلات الآتية في الزمرة س، هـ .

$$(P) \quad ١^{-١د} \circ هـ = س$$

$$(B) \quad س \circ هـ = ١^{-٧د}$$

$$(C) \quad س \circ هـ = ١^{-٣د}$$

تمارين (١-٦)

(١) أوجد حلول المعادلات الآتية في النظام (س، هـ، ١١) ، إن وجدت :

$$(P) \quad س \circ ٣ = ٢ \quad (ح) \quad هـ \circ ٥ = س$$

$$(B) \quad ٧ \circ س = ١ \quad (د) \quad س \circ ٩ = ٢$$

(٢) أوجد حلول المعادلات الآتية في النظام (س، هـ، ٨) ، إن وجدت :

$$(P) \quad س \circ ٣ = ٢ \quad (ح) \quad ٢ \circ س = ٥$$

$$(B) \quad ٢ \circ س = ١ \quad (د) \quad ٢ \circ س = ٦$$

(٢) برهن أن النظام ($\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot$) مغلق وتجميعي وإبدالي وبه عنصر محايد ضربياً هو

العدد ١ ، عندما $n < 2$ ، $n \geq 2$ ط .

في التمارين (٤) إلى (١٠) إذا كانت الزمرة دائرية فعين أحد مولداتها :

$$(٤) (0, \{1, -1\})$$

$$(٥) (\oplus, \mathbb{Z}_5)$$

$$(٦) (\odot, \mathbb{Z}_{13}^*)$$

$$(٧) (\oplus, \mathbb{Z}_r), \text{ حيث } r \geq 2$$

$$(٨) (\odot, \mathbb{Z}_8), \text{ حيث } \mathbb{Z}_8 = \{2, 4, 6, 8\}, \odot \text{ عملية ضرب مقياس } ١٠$$

$$(٩) (\odot, \mathbb{Z}_8), \text{ حيث } \mathbb{Z}_8 = \{1, 3, 5, 7\}, \odot \text{ عملية ضرب مقياس } ٨$$

$$(١٠) (0, \mathbb{Z}_n^*)$$

(١١) في التمارين (٤) إلى (١٠) عين رتبة الزمرة عندما تكون منتهية .

(١٢) في الزمرة $(\mathbb{Z}_{11}^*, \odot)$ احسب كلاً من :

$$(٢) 2^3 \quad (د) 5^{-4}$$

$$(ب) 2^{-3} \quad (هـ) 7^{-1}$$

$$(جـ) 10^0 \quad (و) 9^{-9}$$

(١٣) في الزمرة $(\mathbb{Z}_{13}^*, \oplus)$ عين أربع زمر جزئية مختلفة للزمرة \mathbb{Z}_{13}^* .

(١٤) هل $(\mathbb{Z}_{11}^*, \odot)$ زمرة ؟ ولماذا ؟

(١٥) هل $(\mathbb{Z}_{11}^*, \odot)$ زمرة ؟ ولماذا ؟

(١٦) ناقش صحة العبارة الآتية :

\mathbb{Z}_n زمرة دائرية $\Leftrightarrow \mathbb{Z}_n$ زمرة إبدالية .

(١٧) اذكر سبباً واحداً فقط لكون العبارة فيما يلي خاطئة :

- ٠ (P) النظام $(\odot , \{ ٢ , ١ \})$ زمرة جزئية من الزمرة (\odot , \vee) .
- ٠ (ب) النظام $(+ , \{ ١ - , ١ \})$ زمرة جزئية من الزمرة $(+ , \vee)$.
- ٠ (جـ) النظام $(+ , ك)$ زمرة جزئية من الزمرة $(+ , \vee)$.

١ - ١٠ النظام ذو العمليتين الثنائيتين :

تعرف أن عملية الجمع « + » على مجموعة الأعداد الكلية ك هي عملية ثنائية وقد رمزنا لذلك بالزوج المرتب $(+ , ك)$ ، كما أن عملية الضرب « × » على المجموعة ك هي أيضاً عملية ثنائية رمزنا لها بالزوج المرتب $(× , ك)$. وفي هذا البند سنرمز لعمليتي الجمع والضرب معاً على ك بالثلاثي المرتب $(× , + , ك)$ وندعوه نظاماً إذا عمليتين ثنائيتين أو نظاماً مغلقاً بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب .

وعادة نهتم بدراسة مثل هذا النظام (كما سنرى ذلك في باب « الأعداد المركبة » إن شاء الله) ومعرفة ما إذا كانت إحدى عمليتيه تتوزع على الأخرى ، فمثلاً ، في النظام $(× , + , ك)$ نلاحظ أن

$$(٥ \times ٢) + (٢ \times ٣) = (٥ + ٢) \times ٣$$

$$= (٣ \times ٥) + (٣ \times ٢) =$$

$$٣ \times (٥ + ٢) =$$

وبالمثل :

$$٢ \times ٧ + ٣ \times ٧ = (٢ + ٣) \times ٧$$

$$٧ \times ٢ + ٧ \times ٣ =$$

$$٧ \times (٢ + ٣) =$$

وبصفة عامة إذا كانت P ، ب ، ح \exists ك فإن :

$$ح \times P + ب \times P = (ح + ب) \times P$$

$$P \times ح + P \times ب =$$

$$P \times (ح + ب) =$$

ونعبر عن ذلك بقولنا إن عملية الضرب تتوزع على عملية الجمع في ك .

تعريف (١٢-١) :

إذا كان $(S, *, 0)$ نظاماً ذا عمليتين ثنائيتين فإننا نقول إن العملية \circ تتوزع على

العملية $*$ إذا كان لكل $a, b, p \in S$ يتحقق الشرطان :

$$(a \circ p) * (b \circ p) = (a * b) \circ p$$

$$(p \circ a) * (p \circ b) = p \circ (a * b)$$

مثال (٣٠-١) :

(١) في النظام $(\mathbb{Z}, -, \times)$ تتوزع عملية الضرب على عملية الطرح لأنه :

لكل $a, b, p \in \mathbb{Z}$ فإن :

$$[(a - b) + p] \times p = (a - b) \times p$$

$$(a - b) \times p + b \times p =$$

$$p \times (a - b) + p \times b =$$

$$p \times [(a - b) + b] =$$

$$p \times (a - b) =$$

(٢) في النظام $(\mathbb{Z}, +, \times)$ لا تتوزع عملية الجمع على عملية الضرب أي أنه :

لكل $a, b, p \in \mathbb{Z}$ فإن :

$$p \neq (a \times b) + p, \text{ ما لم يكن } p = 0$$

$$\text{فمثلاً : } 17 = 12 + 5 = (4 \times 3) + 5$$

$$72 = 9 \times 8 = (4 + 5) \times (3 + 5)$$

مثال (٣١-١) :

إذا كانت S مجموعة جميع المجموعات الجزئية لمجموعة معينة فإنك تعلم من دراستك السابقة

أن كلا من عمليتي التقاطع \cap والاتحاد \cup تتوزع على الأخرى . أي أنه في النظام (S, \cap, \cup)

يتحقق مايلي :

(١) عملية التقاطع \cap تتوزع على عملية الاتحاد \cup .

(٢) عملية الاتحاد \cup تتوزع على عملية التقاطع \cap .

تدريب (١ - ١٧)

(١) هل عملية الضرب تتوزع على عملية الجمع في النظام (ن ، + ، ×) ، ولماذا ؟

(٢) هل عملية الجمع تتوزع على عملية الضرب في النظام (ن ، + ، ×) ، ولماذا ؟

(٣) هل عملية الضرب تتوزع على عملية الطرح في النظام (صه ، - ، ×) ، ولماذا ؟

(٤) هل عملية الطرح تتوزع على عملية الضرب في النظام (صه ، - ، ×) ، ولماذا ؟

تمارين عامة

(١) إذا كانت \otimes عملية ثنائية على المجموعة ك معرفة على النحو التالي :

$$س \otimes ص = س + ص + س \quad \text{لكل } س ، ص \in ك$$

فأجب عما يلي :

(٢) أحسب قيمة (٣ \otimes ٤) (٤ \otimes ٧) ،

٣ \otimes (٤ \otimes ٧) وقارن بينهما .

(ب) أثبت أن \otimes إبدالية .

(ج) ماهو العنصر المحايد للعملية \otimes ؟

(د) هل العملية \otimes تجميعية . ؟

(٢) إذا كانت * عملية ثنائية معرفة على المجموعة صه على النحو التالي :

$$س * ص = س - ٢ ص$$

فأجب عما يلي :

(P) احسب قيمة $(٧ * ٦) * ٢$ ، $٢ * (٧ * ٦)$ ، $(٢ * ٧) * ٦$

(ب) هل يوجد للعملية الثنائية * عنصر محايد ؟

(ج) هل العملية الثنائية * إبدالية ؟ تجميعية ؟

(٣) لتكن العملية * معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية ح كالآتي :

$$٠ \text{ ب } * \text{ P } = \text{ P } - \text{ P} + \text{ P} \text{ ب}$$

(P) أثبت أن * غير إبدالية .

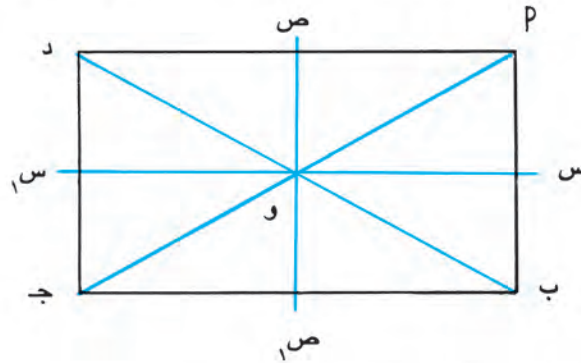
(ب) أوجد العنصر المحايد لهذه العملية إن أمكن .

(٤) (P) أكتب جدولاً لعملية تحصيل التطبيقات ه على المجموعة

$$S = \{ ١د ، ٢د ، ٣ل ، ٤ل \} \text{ حيث :}$$

١د : دوران المستطيل P ب ح د باتجاه دوران عقارب الساعة حول « و » بزاوية ٣٦٠°

٢د : دوران المستطيل P ب ح د باتجاه دوران عقارب الساعة حول « و » بزاوية ١٨٠°



٣ل : تناظر المستطيل P ب ح د حول س س

٤ل : تناظر المستطيل P ب ح د حول ص ص

(ب) ادرس خواص العملية « ه » من حيث :

(١) كونها عملية ثنائية على S.

- (٢) كونها إبدالية أم لا .
- (٣) وجود عنصر محايد في S_3 .
- (٤) وجود نظير لكل عنصر في S_3 .
- (ج) هل (S_3, \circ) زمرة إبدالية؟ ولماذا؟
- (د) هل (S_3, \circ) زمرة دائرية؟ مع التعليل؟
- (٥) ادرس الأنظمة الواردة في التمارين (١) إلى (٣) وحدد ما إذا كان كل منها زمرة أم لا ، مع التبرير .

(٦) في الزمرة (S_{13}, \circ) أجب عما يلي :

(أ) أكمل : $|S_{13}^*| = \dots$

(ب) ماهو العنصر المحايد في الزمرة S_{13}^* ؟

(ج) ماهو نظير العنصر γ في S_{13}^* ؟

(د) هل γ^2 مولد للزمرة S_{13}^* ؟ ولماذا؟

(هـ) أكمل : $\gamma^{-2} = \dots$

(و) أوجد $|\langle \gamma \rangle|$

(ز) أوجد ثلاث زممر جزئية S_3, S_2, S_3 للزمرة S_{13}^*

بحيث تكون :

$$2 = |S_2| \cdot 3 = |S_3| \cdot 4 = |S_3| \cdot 6$$

(٧) ناقش صحة كل من العبارتين الآتيتين :

(أ) « * عملية ثنائية معرفة على $S_n \Leftrightarrow (S_n, *)$ نظام ذو عملية »

(ب) « النظام (S_n, \circ) ليس زمرة لأي عدد طبيعي n »

(٨) بين ما إذا كانت إحدى العمليتين تتوزع على الأخرى في الأنظمة الآتية :

(أ) $(+, \cdot)$ (ب) $(\cdot, -)$ (ج) $(+, -)$ (د) (\cdot, \div)

المصفوفات والمحددات

- ١ - ٢ تمهيد .
- ٢ - ٢ بعض أنواع المصفوفات المشهورة .
- ٣ - ٢ جمع المصفوفات وضرب مصفوفة بعدد حقيقي.
- ٤ - ٢ ضرب المصفوفات .
- ٥ - ٢ النظير الضربي لمصفوفة .
- ٦ - ٢ بعض التطبيقات البسيطة على المصفوفات .
- أولاً : حل نظام المعادلات من الدرجة الأولى في مجهولين
- ثانياً : تطبيقات متنوعة .
- ٧ - ٢ استخدام المحددات من الدرجتين الثانية والثالثة في حل أنظمة المعادلات الخطية .

٢ - اتمهيد :

نبدأ هذا الباب بدراسة المصفوفات ثم نأتي على دراسة المحددات في نهاية الباب . إن لدراسة المصفوفات في الرياضيات أهمية كبرى إذ أنها تستخدم في العديد من فروع هذا العلم وتطبيقاته ، ومن ذلك استخدام المصفوفات في حل أنظمة المعادلات الخطية وفي حل مسائل البرمجة الخطية والتي تطرقت لحالات مبسطة منها في الصف الأول الثانوي . وتأتي أهمية المصفوفات من أنها تستخدم لتمثيل دوال التحويلات الخطية في موضوع الجبر الخطي . إن للرياضيات تطبيقاتها الكثيرة في العديد من العلوم الإنسانية والاقتصادية والفيزيائية والهندسية وهذا يتمثل بصورة خاصة في المصفوفات والتي لا يستغني عن دراستها المشتغلون في علوم الاقتصاد والاجتماع والفيزياء والإحصاء والهندسة بأنواعها . بالنسبة لتاريخ دراسة المصفوفات فربما يكون أول من استخدمها هو العالم البريطاني كليي (الذي عاش الفترة من ١٨٢١ - ١٨٩٥ م) . لغرض تقديم تعريف المصفوفات ، نستعرض المثال التالي :

مثال (١-٢) :

لنفرض أن لدينا أربعة طلاب P ، ب ، ح ، د كانت درجاتهم في اختبار مادة التفسير هي على الترتيب ٨٥ ، ٧٢ ، ٦٣ ، ٩٠ وفي الحديث الشريف ٧٥ ، ٨٤ ، ٧٠ ، ٨٨ على الترتيب . أما درجاتهم في التوحيد فهي على الترتيب ٦٠ ، ٧٦ ، ٥٨ ، ٨٤ .

يمكن تنظيم هذه المعلومات في جدول مستطيل من ثلاثة صفوف وأربعة أعمدة كما يلي :

د	ح	ب	P	
٩٠	٦٣	٧٢	٨٥	التفسير
٨٨	٧٠	٨٤	٧٥	الحديث الشريف
٨٤	٥٨	٧٦	٦٠	التوحيد

إن الصف الأول في هذا المستطيل يعبر عن درجات الطلاب في التفسير ، والصف الثاني يعبر عن درجاتهم في الحديث الشريف ، أما الصف الثالث فيعبر عن درجات الطلاب في التوحيد ، كما أن العمود الأول يعبر عن درجات الطالب P في المواد الثلاث معاً ، والعمود الثاني يعبر عن درجات الطالب ب في المواد الثلاث معاً ، والعمود الثالث يعبر عن درجات الطالب ح في المواد الثلاث معاً ، أما العمود الرابع فيعبر عن درجات الطالب د في المواد الثلاث معاً .
 إن هذا الجدول يعبر عن مصفوفة ، وقد اصطلح على أن تكتب على الصورة :

$$\begin{pmatrix} ٩٠ & ٦٣ & ٧٢ & ٨٥ \\ ٨٨ & ٧٠ & ٨٤ & ٧٥ \\ ٨٤ & ٥٨ & ٧٦ & ٦٠ \end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{bmatrix} ٩٠ & ٦٣ & ٧٢ & ٨٥ \\ ٨٨ & ٧٠ & ٨٤ & ٧٥ \\ ٨٤ & ٥٨ & ٧٦ & ٦٠ \end{bmatrix}$$

وسنختار الاصطلاح الأول في هذا الكتاب . كما تجدر الملاحظة إلى أن المصفوفة السابقة مكونة من ١٢ عنصراً موزعة في ٣ صفوف و ٤ أعمدة لذا يقال إنها مصفوفة من النوع ٤×٣ وبصفة عامة نقدم التعريفين الآتيين :

تعريف (٢ - ١) :

المصفوفة عبارة عن تنظيم عددي مؤلف من م . ن عنصراً ، مرتبة في جدول مستطيل مكون من م صفراً ، ن عموداً . حيث م ، ن عددان طبيعيين .

تعريف (٢-٢) :

نقول عن مصفوفة إنها من النوع $m \times n$ وتقرأ m في n إذا كانت تحتوي صفوفاً عددها m وأعمدة عددها n كما نقول اختصاراً إنها مصفوفة $m \times n$ حيث m, n عدنان طبيعيين .

سنرمز للمصفوفة بحرف تحته خط مثل \underline{P} ، \underline{B} ، \underline{C} ، ... خشية الالتباس بين المصفوفة وعناصرها .

كما يجب الانتباه إلى أن عناصر أي مصفوفة في هذا الباب تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية \mathbb{R} .

مثال (٢-٢) :

إن كلاً من التنظيمات العددية التالية هو عبارة عن مصفوفة حسب التعريف (٢-١) :

$$\begin{bmatrix} ٣ & ١ & ٤ \\ ٢- & ٥ & ٧- \end{bmatrix} = \underline{P} \quad (١)$$

$$\begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ٠ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix} = \underline{B} \quad (٢)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{B} & \underline{P} \\ \underline{C} & \underline{C} \end{bmatrix} = \underline{C} \quad (٣)$$

$$\begin{bmatrix} ٤١\text{س} & ٣١\text{س} & ٢١\text{س} & ١١\text{س} \\ ٤٢\text{س} & ٣٢\text{س} & ٢٢\text{س} & ١٢\text{س} \\ ٤٣\text{س} & ٣٣\text{س} & ٢٣\text{س} & ١٣\text{س} \end{bmatrix} = \underline{S} \quad (٤)$$

لاحظ أن المصفوفة أ في الفقرة (١) هي عبارة عن ستة عناصر مرتبة في صفين وثلاثة أعمدة .
 إن عناصر الصف الأول هي ٤ ، ١ ، ٣ وعناصر الصف الثاني هي ٧ ، ٥ ، ٢ بينما عناصر
 العمود الأول هي ٤ ، ٧ وعناصر العمود الثاني هي ١ ، ٥ وعناصر العمود الثالث هي ٣ ، ٢-
 وحسب التعريف (٢ - ٢) نقول :

إن أ مصفوفة من النوع ٢×٣ ، حيث $م = ٢$ ، $ن = ٣$.

إن ب مصفوفة من النوع ٢×٣ حيث $م = ٣$ ، $ن = ٢$ ،

ج مصفوفة من النوع ٢×٢ حيث $م = ٢$ ، $ن = ٢$ ،

أما المصفوفة س فهي من النوع ٤×٣ (لماذا ؟)

تدريب (٢ - ١)

في كل من الفقرات (٢) ، (٣) ، (٤) عين عناصر الصفوف والأعمدة لكل مصفوفة كما فعلنا
 في الفقرة (١) .

بصفة عامة إذا كانت س مصفوفة من النوع $م \times ن$ فإننا نكتب س على الصورة التالية :

$$\begin{bmatrix} \text{س}_{١١} & \text{س}_{١٢} & \text{س}_{١٣} \\ \text{س}_{٢١} & \text{س}_{٢٢} & \text{س}_{٢٣} \\ \dots & \dots & \dots \\ \text{س}_{م١} & \text{س}_{م٢} & \text{س}_{م٣} \end{bmatrix} = \underline{\text{س}}$$

ورغبة في الاختصار نكتب المصفوفة س بالصورة :

$$\underline{\text{س}} = [\text{س}_١ \dots \text{س}_٣] \text{ حيث } \text{س}_١ = ١, ٢, ٣, \dots, م$$

$$\text{س}_٢ = ١, ٢, ٣, \dots, ن$$

إن $\text{س}_١$ يمثل عنصراً عاماً في المصفوفة س حيث ترمز $\text{س}_١$ إلى ترتيب الصف الذي يقع فيه
 العنصر ، بينما ترمز $\text{س}_٢$ إلى ترتيب العمود الذي يقع فيه هذا العنصر وبذلك يتعين العنصر $\text{س}_١$
 تماماً بمعرفة قيمتي $\text{س}_١$ ، $\text{س}_٢$ معاً وبعبارة أخرى ، فإن العنصر $\text{س}_١$ هو عنصر المصفوفة س
 الذي يقع في تقاطع الصف ذي الترتيب $\text{س}_١$ والعمود ذي الترتيب $\text{س}_٢$.

إن عناصر الصف ذي الترتيب i في المصفوفة S هي :

$$s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{in}$$

وعناصر العمود ذي الترتيب j في المصفوفة S هي :

$$s_{1j}, s_{2j}, \dots, s_{mj}$$

مثال (٢-٣) :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} = S$$

فحين قيم جميع العناصر s_{ij}

الحل :

بما أن المصفوفة من النوع 3×2 فإن :

$$i = 1, 2 \text{ بينما } j = 1, 2, 3 \text{ وبالتالي فإن .}$$

s_{ij} له ستة قيم هي :

$$s_{11} = 2 \text{ العنصر الذي يقع في الصف الأول والعمود الأول } s_{11} = 1$$

$$s_{12} = 1 \text{ العنصر الذي يقع في الصف الأول والعمود الثاني } s_{12} = 1$$

$$\text{وبالمثل } s_{21} = 5, s_{22} = 1, s_{23} = 4, s_{24} = 5$$

تعريف (٢-٣) :

نقول إن المصفوفتين S ، T متساويتان ونكتب $S = T$ إذا تحقق الشرطان التاليان معاً :

(١) S ، T من نوع واحد أي أن عدد صفوف S يساوي عدد صفوف T وعدد أعمدة

S يساوي عدد أعمدة T .

(٢) $s_{ij} = t_{ij}$ لجميع قيم i ، j الممكنة ، حيث i ، j عدنان طبيعيان .

مثال (٢-٤) :

عَيِّن قيم P ، b ، c ، d إذا عملت أن :

$$\begin{bmatrix} 4- & b-P \\ 5 & 2+c+3 \end{bmatrix} = \underline{س}$$

$$\begin{bmatrix} b+d & 1 \\ b-1 & 9 \end{bmatrix} = \underline{ص}$$

وأن $\underline{س} = \underline{ص}$

الحل :

من تعريف تساوي مصفوفتين نجد أن :

$$(1-2) \quad 1 = b - P$$

$$(2-2) \quad 9 = 3 + c + 2$$

$$(3-2) \quad 4 - = b + d$$

$$(4-2) \quad 5 = b - 1$$

من المعادلة (٢-٢) نجد أن $b - = 4$ ومن (١-٢) نجد أن

$$. 3 - = 4 - 1 = b + 1 = P$$

من المعادلة (٢-٢) نجد أن $c = 3$ وأخيراً نحصل على قيمة d ، من المعادلة (٣-٢)

$$. \text{حيث } d = 4 - = b - 4 = 4 + 4 = \text{صفرًا} .$$

تدريب (٢-٢)

(١) ماعدد العناصر في كل من المصفوفات الآتية :

(أ) مصفوفة من النوع 3×2 (ب) مصفوفة من النوع 8×7

(د) مصفوفة من النوع 12×12 (ح) مصفوفة من النوع 7×7

(هـ) مصفوفة من النوع $n \times n$ (و) مصفوفة من النوع $m \times n$

(٢) أوجد قيمة كل من p ، b ، c ، d إذا كان :

$$\begin{bmatrix} 5 - & 3 \\ 2 - d^3 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + b^2 & 2 - p \\ 16 & 3 + p \end{bmatrix}$$

تمارين (٢ - ١)

(١) أربع مدن هي p ، b ، c ، d ، فإذا كانت المسافة بالكيلومترات بين أي مدينتين موضحة في الجدول التالي :

	د	ح	ب	p
p	٢١١	٧٠	٦٥	٠
ب	٢٢	٤٦	٠	٦٥
ح	١٨٥	٠	٤٦	٧٠
د	٠	١٨٥	٢٢	٢١١

فأجب عما يلي :

أولاً : اكتب مصفوفة تمثل هذه المعلومات

ثانياً : بفرض أن س هي المصفوفة المطلوبة في أولاً

أوجد مايلي :

(p) س s_{pp} وماذا يعني ذلك ؟

(ب) س s_{pp} وماذا يعني ذلك ؟

(ح) ما هي العلاقة بين s_{pp} ، s_{pp} ؟

(د) اكتب جميع عناصر الصف الثاني للمصفوفة س .

(هـ) اكتب جميع عناصر العمود الثاني للمصفوفة س .

(و) ماذا يمكن استنتاجه من (د) ، (هـ) ؟

(ز) أوجد s_{ii} عندما $i = 1, 2, 3, 4$.

ماذا تلاحظ مع إبداء السبب ؟

(ح) أكمل مايلي :

(١) س مصفوفة من النوع

(٢) $س_١ ر = س_٢ ر$ لجميع قيم

(ط) هل تلاحظ أن س هي مصفوفة تتمتع بخواص معينة لا تنطبق على المصفوفات بشكل

عام أم لا ؟

(٢) أوجد قيمة كل من $پ$ ، $ب$ ، $د$ ، $ح$

إذا عملت أن :

$$\begin{bmatrix} ٢ب & ١٥ \\ ٠ & ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٢٣ \\ ٢ب-د & ٢٢+ح \end{bmatrix}$$

(٣) اكتب المصفوفة پ إذا علمت أن پ مصفوفة ٤×٥ وأن عناصر الصف الأول هي

$پ$ ، $ب$ ، $د$ ، $هـ$ على الترتيب وعناصر الصف الثاني هي $پ$ ، $ب$ ، $د$ ، $هـ$ على الترتيب

وأن عناصر الصف الثالث هي نفس عناصر الصف الأول بعد ضرب كل عنصر في $\frac{٢}{٣}$ ، بينما

عناصر الصف الرابع هي نفس عناصر الصف الثاني بعد ضرب كل عنصر في $(٢ -)$.

هـ	د	
٥٠-ع٢	٥٠+س	پ
$\frac{٢٠}{٣}ج$	ص	ب
٥٢-س	$\frac{٤}{٣}ج$	ح

جدول (٢)

هـ	د	
١٥٠	١٥٠	پ
١٠٠	١٥٠	ب
١٠٠	٢٠	ح

(٤)

جدول (١)

الجدول (١) يبين أجور المكالمات الهاتفية في الدقيقة الواحدة بالهللات من $پ$ ، $ب$ ، $د$ ، $ح$ إلى

المدينتين $د$ ، $هـ$ والجدول (٢) يمثل أجور المكالمات الهاتفية في الدقيقة الواحدة بالهللات من

المدن \bar{A} ، \bar{B} ، \bar{C} إلى المدينتين \bar{D} ، \bar{E} ، والمطلوب :

(أ) كتابة مصفوفة تعبر عن الجدول (١) وتبيان نوعها وعدد عناصرها .

(ب) كتابة مصفوفة تعبر عن الجدول (٢) .

(جـ) إذا علمت أن المصفوفتين المعبرتين عن الجدولين (١) ، (٢) متساويتان فأوجد قيم كل

من s ، v ، e ، l .

٢ - ٢ بعض أنواع المصفوفات المشهورة :

(١) المصفوفة المستطيلة :

وهي مصفوفة من النوع $m \times n$ حيث $m \neq n$ وفي الحالة التي يكون فيها $m = 1$ فإن المصفوفة تسمى « مصفوفة صف » أي أن مصفوفة الصف هي من النوع $1 \times n$ وعندما تكون $n = 1$ فإن المصفوفة تسمى « مصفوفة عمود » أي أن مصفوفة العمود من النوع $m \times 1$.

(٢) المصفوفة المربعة :

وهي المصفوفة من النوع $n \times n$ أي أن عدد صفوفها يساوي عدد أعمدها . لاحظ أنه في أي مصفوفة مربعة $n \times n$ حيث $n = [s_i r_i]$ تسمى العناصر $s_i r_i$ بالقطر الأساسي للمصفوفة $s_i r_i$.

(٣) المصفوفة القطرية :

وهي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار ما عدا العناصر الواقعة على القطر فيكون أحدها على الأقل مغايراً للصفر .

(٤) مصفوفة الوحدة :

وهي مصفوفة قطرية يكون فيها كل من العناصر الواقعة على القطر مساوياً للواحد وسنرمز لها بالرمز E_n أو بالرمز I_n إذا لم نخش الالتباس .

(٥) المصفوفة الصفرية :

وهي المصفوفة $m \times n$ وجميع عناصرها أصفار . وسنرمز لها بالرمز « $m \times n$ » أو بالرمز « Z » إذا لم نخش الالتباس .

ويلاحظ أن م قد تساوي ن هنا وعندها نكتفي بالرمز « ن » أو بالرمز « ن » فقط

مثال (٢-٥) :

$$(١) \text{ المصفوفة : } \begin{bmatrix} ٣- & ٢ & ٦ \\ ٤ & ١- & ١٠ \end{bmatrix} \text{ مستطيلة فيها } م = ٢ ، ن = ٣$$

$$(٢) \text{ المصفوفة : } [٤- \quad ٠ \quad ٣ \quad ٢] \text{ مصفوفة صف فيها } م = ١ ، ن = ٤$$

$$(٣) \text{ المصفوفة : } \begin{bmatrix} ٣ \\ ٠ \\ ١ \end{bmatrix} \text{ مصفوفة عمود ، فيها } م = ٣ ، ن = ١$$

$$(٤) \text{ المصفوفة : } \begin{bmatrix} ٥ & ١- & ٣ \\ ٠ & ٢ & ٦- \\ ٦ & ٣ & ٧ \end{bmatrix}$$

مصفوفة مربعة ٣×٣ قطرها الأساسي الأعداد ٣ ، ٢ ، ٦ وقطرها الآخر (الثاني)

الأعداد ٧ ، ٢ ، ٥ .

$$(٥) \text{ المصفوفة : } \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١- & ٠ \\ ٢ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

مصفوفة قطرية ٣×٣ قطرها هو ١ ، ١- ، ٢

$$(٦) \text{ كل من المصفوفات } [١] ، \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} \text{ هي مصفوفة وحدة .}$$

$$(٧) \text{ كل من المصفوفات : } [٠] ، [:] ، [٠ ٠] ، [: :] ، [: : :]$$

هي مصفوفة صفرية . لاحظ أن كل واحدة منها تختلف عن الأخرى فمثلا : $[٠] \neq [:]$

لأن اليمنى من النوع 2×1 أما اليسرى فمن النوع 1×2 .

٢ - ٣ جمع المصفوفات وضرب مصفوفة بعدد حقيقي :

جمع المصفوفات :

إن للمصفوفات بناءً جبرياً يمكن من خلاله أن تجري العديد من العمليات الحسابية مثل الجمع والضرب ولكن هناك قيود على هذه العمليات تتعلق بنوع كلٍ من المصفوفتين الخاضعتين للعملية الجبرية . سنبدأ في هذا البند بعملية الجمع . فإذا كان لدينا :

$$\begin{bmatrix} 11 & 7 \\ 15 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \underline{\text{ص}} , \quad \begin{bmatrix} 1- & 4 \\ 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = \underline{\text{س}}$$

وهما من النوع نفسه (2×3) فإنه من الطبيعي أن يكون حاصل جمع ص + س مصفوفة

من النوع نفسه (2×3) وعناصرها هي حاصل جمع عناصر المصفوفتين ص ، س أي أن :

$$\begin{bmatrix} 11 + 1- & 7 + 4 \\ (15-) + 2 & 2 + 5 \\ 2 + 7 & 4 + 3 \end{bmatrix} = \underline{\text{ص}} + \underline{\text{س}}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 13- & 7 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} =$$

ماذا لو كان نوعا المصفوفتين المراد جمعها مختلفين ؟

هل يمكن جمعها ؟ نرجو أن تكون قد عرفت الجواب .

على أية حال ها نحن نورد تعريف جمع مصفوفتين مما يجيب على السؤال :

تعريف (٢-٤) :

إذا كانت $S = [s_{ij}]$ ، $H = [h_{ij}]$ مصفوفتين كل منهما من النوع $(m \times n)$ فإن مجموعهما هو مصفوفة من النوع نفسه وهي :

$$C = [c_{ij}] \text{ حيث } c_{ij} = s_{ij} + h_{ij} .$$

إن هذا التعريف يعني أننا نستطيع جمع أي مصفوفتين S ، H إذا S و H فقط كانتا من النوع نفسه $(m \times n)$ وحينئذ يمكننا أن نكتب مجموعهما بالصورة .

$$S + H = [s_{ij}] + [h_{ij}] = [c_{ij}]$$

أي أننا نحصل على مصفوفة جديدة من النوع نفسه كل عنصر فيها هو مجموع العنصرين المتناظرين بالوضع في S ، H .

مثال (٢-٦) :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2- & 7 \\ 1 & 6 & 5- \end{bmatrix} = S \text{ إذا كانت } S$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2- \\ 7- & 3 & 5 \end{bmatrix} = H$$

فأوجد : $S + H$

الحل :

بما أن المصفوفتين S ، H من النوع نفسه فإن الجمع ممكن (معرف) .

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2- \\ 7- & 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2- & 7 \\ 1 & 6 & 0- \end{bmatrix} = \underline{\text{س}} + \underline{\text{ص}}$$

من التعريف (٤ - ٢)

$$\begin{bmatrix} 4 + 3 & 3 + (2-) & (2-) + 7 \\ (7-) + 1 & 3 + 6 & 0 + (0-) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 6- & 9 & 0 \end{bmatrix} =$$

تدريب (٣ - ٢)

في المثال (٦ - ٢) أوجد كلاً من :

ص + س ، س + ص

هل يمكن جمع المصفوفة س مع المصفوفة ع

علماً بأن :

$$\begin{bmatrix} 0 & 2- \\ 3 & 3 \\ 7- & 4 \end{bmatrix} = \underline{\text{ع}}$$

ولماذا ؟

وازن بين س + ص ، ص + س

ماذا تلاحظ ؟

ضرب مصفوفة بعدد حقيقي :

الجدول الآتي يبين أجور المكالمات الهاتفية بين المدن المذكورة فيه بالريالات للدقيقة الواحدة .

مرات	عفيف	الخرج	
١٥ر	١	١٥ر	الطائف
٢٠ر	١	١	ساجر

إن المصفوفة

$$\text{تمثل هذا الجدول} \begin{bmatrix} ١٥ & ١ & ١٥ \\ ٠.٢ & ١ & ١ \end{bmatrix} = \underline{\text{س}}$$

لو ضربنا كل عنصر من عناصر هذه المصفوفة بالعدد ١٠٠ لظهرت معنا مصفوفة أخرى تعبر عن الأجور بين تلك المدن بالهلات ونكون بذلك قد ضربنا المصفوفة س بالعدد ١٠٠ أي أن :

$$\begin{bmatrix} ١٥٠ & ١٠٠ & ١٥٠ \\ ٢٠ & ١٠٠ & ١٠٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٥ & ١ & ١٥ \\ ٠.٢ & ١ & ١ \end{bmatrix} ١٠٠ = \underline{\text{س}} ١٠٠$$

وبالتالي نقدم تعريف ضرب مصفوفة بعدد حقيقي بشكل عام :

تعريف (٢-٥) :

إذا كانت س = [س_{١٢}] مصفوفة م × ن وكان ك ∈ ح فإن حاصل ضرب المصفوفة س بالعدد الحقيقي ك هو المصفوفة ع = [ع_{١٢}] حيث ع_{١٢} = ك · س_{١٢} لجميع قيم ١ ، ه الممكنة أي أن : ك · س = [ك · س_{١٢}]}

في التعريف (٢-٥) لما كانت ك ، س_{١٢} ∈ ح فإن :}

ك · س_{١٢} = س_{١٢} · ك لجميع قيم ١ ، ه الممكنة وبالتالي فإن :}}

$$[ك · س_{١٢}] = [س_{١٢} · ك]}}$$

وهذا يعني أن بإمكاننا أن نكتب ك · س = س · ك ولعلك تلاحظ أن المصفوفة الناتجة من النوع نفسه .

مثال (٧-٢) :
 إذا كانت $\underline{س}$ = $\begin{bmatrix} ٣- & ١ \\ ٤ & ٢ \\ ١- & ٠ \end{bmatrix}$ فأوجد المصفوفة $\underline{ك}$. $\underline{س}$ عندما تكون $\underline{ك} = ٢$
 الحل :

بتطبيق التعريف (٢ - ٥) مباشرة نجد أن :

$$\underline{ك} . \underline{س} = ٢ = \underline{س} = ٢$$

$$\begin{bmatrix} (٣-) \times ٢ & ١ \times ٢ \\ ٤ \times ٢ & ٢ \times ٢ \\ (١-) \times ٢ & ٠ \times ٢ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٦- & ٢ \\ ٨ & ٤ \\ ٢- & ٠ \end{bmatrix} =$$

تدريب (٢ - ٤)

في المثال (٧ - ٢) أوجد $\underline{ك}$. $\underline{س}$ عندما تكون :

$$\underline{ك} = \frac{١}{٢}$$

$$\underline{ك} = ١ -$$

$$\sqrt[٢]{\underline{ك}} =$$

تعريف (٦ - ٢) :

إذا كانت $\underline{س}$ ، $\underline{ص}$ مصفوفتين $م \times ن$ فإن الفرق $\underline{س} - \underline{ص}$ يعرف كما يلي :

$$\underline{س} - \underline{ص} = \underline{س} + (١-) \underline{ص}$$

وهذا يعنى أن $\underline{ع} = \underline{س} - \underline{ص}$ حيث : $\underline{ع} = \underline{س} - \underline{ص}$ ، $\underline{ص} = \underline{س} - \underline{ع}$ ، $\underline{س} = \underline{ع} + \underline{ص}$ ، هـ الممكنة .

مثال (٢-٨) :

إذا كانت

$$\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٢- \\ ١ & ٧ & ٠ \end{bmatrix} = \underline{\text{ص}} ، \begin{bmatrix} ٥ & ٢- & ٢ \\ ٠ & ١ & ٦- \end{bmatrix} = \underline{\text{س}}$$

فأوجد : س - ص

الحل :

$$\begin{bmatrix} ٢-٥ & ١-٢- & (٢-)-٢ \\ (١-)-٠ & ٧-١ & ٠-٦- \end{bmatrix} = \underline{\text{س}} - \underline{\text{ص}}$$

$$(١) \begin{bmatrix} ٢ & ٤- & ٤ \\ ١ & ٦- & ٦- \end{bmatrix} =$$

تدريب (٢-٥)

في المثال (٢-٨) أوجد : س - ص

ثم وازن بين س - ص ، ص - س

ماذا تلاحظ ؟

خواص جمع المصفوفات وضربها بعدد حقيقي

(P) خواص جمع المصفوفات

إذا كانت S مجموعة المصفوفات من النوع $m \times n$ فإن النظام $(S, +)$ ، حيث « + »

عملية جمع المصفوفات يتمتع بالخواص الآتية :

(١) العملية « + » ثنائية على S لأنه :

لكل $S, S' \in S$ فإن $S + S' \in S$ وذلك وفق التعريف (٢-٤) .

(٢) العملية « + » إبدالية لأنه :

لكل s, v ، $v \oplus s = s \oplus v$ فإن :

$$s \oplus v = [s \oplus v + (s \oplus v)] \text{ وفق التعريف (٢ - ٤)}$$

$$= [s \oplus v + (s \oplus v)] \text{ لأن عملية الجمع في ح إبدالية .}$$

$$= s \oplus v \text{ وفق التعريف (٢ - ٤) .}$$

(٣) العملية « + » تجميعية (دماجة) لأن :

لكل s, v, e ، $v \oplus (s \oplus e) = (v \oplus s) \oplus e$ فإن :

$$(s \oplus v) \oplus e = [s \oplus v + (s \oplus v + e)] \text{ وفق التعريف (٢ - ٤)}$$

$$= [s \oplus v + (s \oplus v + e)] \text{ لأن عملية الجمع في ح تجميعية .}$$

$$= s \oplus (v \oplus e) \text{ ، لماذا ؟}$$

(٤) يوجد في S عنصر محايد ، هو المصفوفة الصفرية 0_n لأنه :

لكل s ، $s \oplus 0_n = s$ فإن :

$$s \oplus 0_n = s$$

(٥) لكل مصفوفة s ، $s \oplus 0_n = s$ يوجد مصفوفة .

$s \oplus (-s) = 0_n$ بحيث يكون :

$$s \oplus (-s) = 0_n$$

تسمى المصفوفة s المعكوس (النظير) الجمعي للمصفوفة s ونرمز لذلك بالرمز

$$(-s) \text{ ونستنتج من ذلك أن : } (-s) \oplus s = 0_n$$

ملحوظة (٢ - ١)

لعلك تلاحظ أن الخواص السابقة يمكن إيجازها في قولنا « إن النظام ($S, +$)

زمرة إبدالية » .

(ب) خواص ضرب مصفوفة بعدد حقيقي :

إذا كانت \underline{S} ، \underline{M} مصفوفتين $n \times m$ وكان \underline{K} ، $\underline{L} \in \mathbb{C}$ فإن :

$$(P) \quad \underline{K} \cdot (\underline{S} + \underline{M}) = \underline{K} \cdot \underline{S} + \underline{K} \cdot \underline{M}$$

$$(B) \quad (\underline{K} + \underline{L}) \cdot \underline{S} = \underline{K} \cdot \underline{S} + \underline{L} \cdot \underline{S}$$

$$(C) \quad \underline{K} \cdot (\underline{L} \cdot \underline{S}) = (\underline{K} \cdot \underline{L}) \cdot \underline{S}$$

$$(D) \quad \underline{K} \cdot \underline{S} = \underline{0} \iff \underline{K} = \underline{0} \text{ أو } \underline{S} = \underline{0}$$

$$(E) \quad \underline{K} \cdot \underline{S} = \underline{0} \iff \underline{K} \neq \underline{0} \iff \underline{S} = \underline{0}$$

$$(O) \quad \underline{S} \cdot \underline{1} = \underline{S}$$

يعتمد برهان هذه الخواص على فرض أن :

$\underline{S} = [s_{ij}]$ ، $\underline{M} = [m_{ij}]$ والأخذ بعين الاعتبار تعريف جمع مصفوفتين ،

وتعريف ضرب مصفوفة بعدد حقيقي وأن العناصر $s_{ij} + m_{ij} + s_{ij} \in \mathbb{C}$.

سنبرهن على صحة الفقرة (P) ، ونترك الفقرات الباقية كتمرين للطالب :

(P) لنفرض $[e_{ij}] = \underline{E} = \underline{S} + \underline{M}$ فيكون :

$$\underline{K} \cdot (\underline{S} + \underline{M}) = \underline{K} \cdot \underline{E}$$

$$= [\underline{K} e_{ij}] ، \text{ تعريف (2-5) } =$$

$$= [\underline{K} (s_{ij} + m_{ij})] \text{ لأن } e_{ij} = s_{ij} + m_{ij} =$$

$$= [s_{ij} \cdot \underline{K} + m_{ij} \cdot \underline{K}] \text{ لأن عملية الضرب تتوزع على عملية الجمع في } \mathbb{C}$$

$$= [s_{ij} \cdot \underline{K}] + [m_{ij} \cdot \underline{K}] ، \text{ وفق التعريف (2-4) .}$$

$$= \underline{K} \cdot \underline{S} + \underline{K} \cdot \underline{M} ، \text{ لماذا ؟ .}$$

مثال (2-9) :

إذا كانت \underline{P} ، \underline{B} ، $\underline{S} \in \mathbb{R}^n$ حيث $\underline{S} \in \mathbb{R}^n$ مجموعة المصفوفات $n \times n$ فأوجد \underline{S} التي

هي حل للمعادلة :

$$(1) \quad \underline{P} = \underline{B} + \underline{S}$$

الحل :

بإضافة المصفوفة \underline{P} - إلى طرفي المعادلة (١) نجد أن :

$$\underline{S} + \underline{P} = (\underline{P} -) + \underline{P} + \underline{S}$$

أو $\underline{S} + \underline{P} = ((\underline{P} -) + \underline{P}) + \underline{S}$ خاصة التجميع (الدمج) في جمع المصفوفات .

$\underline{S} + \underline{P} = \underline{S}$ خاصة العنصرين المتناظرين بالنسبة لجمع المصفوفات .

$\underline{S} = \underline{P}$ خاصة العنصر المحايد الجمعي

ملحوظة (٢ - ٢)

إن $\underline{P} -$ هي النظير الجمعي للمصفوفة \underline{P} ، وهو نظير وحيد والعنصر المحايد (\underline{S})

وحيد وبالتالي يكون :

$$\underline{S} = \underline{P} - \underline{P} \text{ حلاً وحيداً للمعادلة (١) .}$$

مثال (٢ - ١٠) :

إذا كانت :

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} , \quad \underline{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

فأوجد حل المعادلة : $\underline{P} = \underline{B} + \underline{S}$ وتحقق من صحة الناتج .

الحل :

اعتماداً على ما حصلنا عليه في المثال (٢ - ٩) يكون الحل هو :

$$\underline{S} = \underline{P} - \underline{B}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} =$$

التحقيق :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

الطرف الأيسر =

تدريب (٢ - ٦)

(١) قم ببرهان الخواص (ب) ، (ج) ، (د) ، (هـ) ، (و) من خواص ضرب مصفوفة بعدد حقيقي .

(٢) أوجد حل المعادلة $\underline{س} + \underline{پ} = \underline{ب}$ علماً بأن :

$$\begin{bmatrix} ٢- & ١- & ١ \\ ٤ & . & ١- \end{bmatrix} = \underline{ب} , \quad \begin{bmatrix} ٢ & . & ١- \\ ٣- & ١ & . \end{bmatrix} = \underline{پ}$$

مثال (١١ - ٢) :

حل المعادلة المصفوفية الآتية :

$$\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١- & . \end{bmatrix} + \underline{س} (٤-) = \left\{ \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ . & ١- \end{bmatrix} - \underline{س} \right\} ٣-$$

الحل :

باستخدام الفقرات (پ) ، (ب) ، (ج) من خواص ضرب مصفوفة بعدد حقيقي ينتج :

$$\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١- & . \end{bmatrix} + \underline{س} (٤-) = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ . & ١- \end{bmatrix} (١-) (٣-) + \underline{س} . (٣-)$$

$$\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١- & . \end{bmatrix} + \underline{س} (٤-) = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ . & ٣- \end{bmatrix} + \underline{س} . (٣-) \quad \leftarrow$$

$$\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١- & . \end{bmatrix} + \underline{س} (٤-) + \underline{س} . ٤ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ . & ٣- \end{bmatrix} + \underline{س} . (٣-) + \underline{س} . ٤ \quad \leftarrow$$

$$\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١- & . \end{bmatrix} + \underline{س} ((٤-) + ٤) = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ . & ٣- \end{bmatrix} + \underline{س} ((٣-) + ٤) \quad \leftarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \underline{\text{س}} \cdot \text{صفر} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \underline{\text{س}} \quad \leftarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\text{س}} \quad \leftarrow$$

ملحوظة (٢ - ٣)

بما أن القواعد العامة لحل المعادلات في النظام العددي ح قائمة هنا ، لذا يمكن حل هذا المثال بسرعة على النحو التالي :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \underline{\text{س}} \text{٤-} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{٣} + \underline{\text{س}} \text{٣-}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{٣-} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\text{س}} \text{٣-} \underline{\text{س}} \text{٤}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\text{س}} \text{٠}$$

تمارين (٢-٢)

(١) قم بالعمليات التالية إن أمكن ، مع ذكر السبب في حالة تعذر إجراء العملية :

$$\begin{bmatrix} ٢ & ١- & ٠ \\ ٥- & ٤ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٢ & ٣ \\ ٤- & ٢ & ١ \end{bmatrix} \quad (أ)$$

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ٦- & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & ١- & ٣ \\ ٦ & ٥ & ٤ \end{bmatrix} \quad (ب)$$

$$\begin{bmatrix} ١ & ١- & ١ \\ ١- & ١ & ١- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ط & ب.ب & م \\ و & ط & د \end{bmatrix} \quad (ج)$$

$$\begin{bmatrix} : & : & : \\ : & : & : \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ل & م & ن \\ ط & و & هـ \end{bmatrix} \quad (د)$$

$$\begin{bmatrix} ص- & س- \\ ل- & ع- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ص & س \\ ل & ع \end{bmatrix} \quad (هـ)$$

$$\begin{bmatrix} ٦- & ٤- \\ ٩ & ٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٦ & ٤ \\ ٢- & ٣- \end{bmatrix} \quad (و)$$

$$\begin{bmatrix} : \\ : \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٦ & ٨ \end{bmatrix} \quad (ز)$$

$$\begin{bmatrix} ص & س \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ب.ب & م \\ د & ح \end{bmatrix} \quad (ح)$$

$$\begin{bmatrix} ٤- \\ ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤ \\ ٥- \end{bmatrix} \quad (ط)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{١}{٦} & \frac{١}{٥} \\ \frac{١}{٩} & \frac{١}{٨} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{١}{٣} & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٥} & \frac{١}{٤} \end{bmatrix} \quad (ي)$$

(٢) إذا عملت أن

$$\begin{bmatrix} 3- & 2- \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{ح}} , \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2- \\ 2- & 4- \end{bmatrix} = \underline{\underline{ب}} , \begin{bmatrix} 3- & 2- \\ 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{پ}}$$

فاحسب :

- (پ) $\underline{\underline{ب}} + \underline{\underline{پ}}$ وكذلك $\underline{\underline{پ}} + \underline{\underline{ب}}$ وتحقق أنهما متساويتان .
 (ب) $(\underline{\underline{ب}} + \underline{\underline{پ}}) + \underline{\underline{ح}}$ وكذلك $\underline{\underline{ح}} + (\underline{\underline{ب}} + \underline{\underline{پ}})$ وتحقق أنهما متساويتان .
 (ح) $\underline{\underline{ب}} - \underline{\underline{پ}}$ وكذلك $\underline{\underline{پ}} - \underline{\underline{ب}}$. هل توجد علاقة بينهما، وما هي إن وجدت ؟
 (د) $(\underline{\underline{ب}} - \underline{\underline{پ}}) + \underline{\underline{ح}}$ وكذلك $\underline{\underline{ح}} - (\underline{\underline{ب}} + \underline{\underline{پ}})$ وهل توجد علاقة بينهما أم لا ؟
 (٣) إذا كانت $\underline{\underline{پ}}$ كما في التمرين رقم (٢) فأوجد المصفوفة ك $\underline{\underline{پ}}$ عندما تكون :

(پ) ك = ٢ (ب) ك = ١ - (ح) ك = ٠

(د) ك = $\frac{٢}{٥}$ (هـ) ك = ١

(٤) إذا كانت :

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{ح}} , \begin{bmatrix} 4 & 3- \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{ب}} , \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \underline{\underline{پ}}$$

فعبّر عن كل مما يأتي كمصفوفة :

- (پ) $2\underline{\underline{پ}} + \underline{\underline{ب}} - \underline{\underline{ح}}$
 (ب) $3\underline{\underline{پ}} + 2\underline{\underline{ب}} - 4\underline{\underline{ح}}$
 (ح) $2(\underline{\underline{ح}} + 2\underline{\underline{پ}}) - 3\underline{\underline{ح}}$
 (د) $2(\underline{\underline{ح}} + \underline{\underline{ب}} + \underline{\underline{پ}})$
 (هـ) $\underline{\underline{پ}} - (\underline{\underline{ب}} + \underline{\underline{ح}})$
 (و) $3(\underline{\underline{ب}} - \underline{\underline{پ}}) + \underline{\underline{ح}}$

(٥) باستعمال المصفوفات \underline{P} ، $\underline{ب}$ ، $\underline{ح}$ الواردة في التمرين رقم (٤) حل كلاً من المعادلات المصفوفية الآتية :

$$\underline{ح} + \underline{ب} = \underline{س} + \underline{P} \quad (٢)$$

$$\underline{ح} - \underline{ب} = \underline{س} + \underline{P} \quad (ب)$$

$$\underline{ب} - (\underline{ح} - \underline{س}) = \underline{س} + \underline{P} \quad (ج)$$

$$\underline{ب} - \underline{س} + \underline{س} = \underline{س} + \underline{P} \quad (د)$$

(٦) بفرض أن $\underline{س}$ ، $\underline{ص}$ مصفوفتان $م \times ن$ ، برهن على أن :

$$\underline{ص} - \underline{س} = (\underline{ص} + \underline{س}) - \underline{س}$$

$$\underline{ص} = (\underline{ص} + \underline{س}) - \underline{س}$$

(٢ - ٤) ضرب المصفوفات :

سنوضح طريقة إيجاد حاصل ضرب مصفوفة بمصفوفة أخرى من خلال الأمثلة الآتية :

$$(١) \text{ إذا كانت } \underline{س} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \end{bmatrix} ، \underline{ص} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٤ \\ ١- \end{bmatrix}$$

فإن حاصل ضرب $\underline{س}$ في $\underline{ص}$ يعرف كما يلي :

$$\begin{bmatrix} ٥ \\ ٤ \\ ١- \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \end{bmatrix} = \underline{ص} \cdot \underline{س}$$

$$= [(١-) \times ٣ + ٤ \times ٢ + ٥ \times ١] =$$

حيث يتم ضرب عنصر من $\underline{س}$ في العنصر الواقع في نهاية السهم في المصفوفة $\underline{ص}$ ومن ثم نجمع النتائج فيكون :

$$\underline{ص} \cdot \underline{س} = [٣ - ٨ + ٥] =$$

$$= [١٠] =$$

$$\begin{bmatrix} 1- & 3 \\ . & 4 \end{bmatrix} = \underline{\text{ہی}} , \begin{bmatrix} 5- & 2 \end{bmatrix} = \underline{\text{ہی}} \text{ (۲) إذا كانت}$$

فإن ہی ہی يعرف كما يلي :

$$\begin{bmatrix} 1- & 3 \\ . & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5- & 2 \end{bmatrix} = \underline{\text{ہی}} . \underline{\text{ہی}}$$

$$[. \times (5-) + (1-) \times 2 \quad 4 \times (5-) + 3 \times 2] =$$

$$[2- \quad 14-] =$$

(۳) إذا كانت :

$$\begin{bmatrix} 1- \\ . \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\text{ہی}} , \begin{bmatrix} 3 & 1- & 1 \\ 1 & . & 2 \end{bmatrix} = \underline{\text{ہی}}$$

فإن ہی . ہی يعرف كما يلي :

$$\begin{bmatrix} 1- \\ . \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1- & 1 \\ 1 & . & 2 \end{bmatrix} = \underline{\text{ہی}} . \underline{\text{ہی}}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 3 + . \times (1-) + (1-) \times 1 \\ 1 \times 1 + . \times . + (1-) \times 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \\ . & 1- \end{bmatrix} = \underline{\text{ہی}} \begin{bmatrix} 1 & . & 2 \\ 3 & 1- & 1 \end{bmatrix} = \underline{\text{ہی}} \text{ (۴) إذا كانت}$$

$$\begin{bmatrix} . \times 1 + 1 \times . + 3 \times 2 & (1-) \times 1 + 5 \times . + 1 \times 2 \\ . \times 3 + 1 \times (1-) + 3 \times 1 & (1-) \times 3 + 5 \times (1-) + 1 \times 1 \end{bmatrix} = \underline{\text{ہی}} . \underline{\text{ہی}}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 7- \end{bmatrix} =$$

(٥) إذا كانت :

$$\begin{bmatrix} ١١ص & ٢١ص & ٣١ص \\ ١٢ص & ٢٢ص & ٣٢ص \end{bmatrix} = \underline{ص} , \quad \begin{bmatrix} ١١س & ٢١س \\ ١٢س & ٢٢س \end{bmatrix} = \underline{س}$$

فإن : $\underline{ص} \cdot \underline{س} =$

$$\begin{bmatrix} ١١ص + ٢١س & ١١ص + ٢١س & ١١ص + ٢١س \\ ١٢ص + ٢٢س & ١٢ص + ٢٢س & ١٢ص + ٢٢س \end{bmatrix}$$

ويوضع $\underline{ص} \cdot \underline{س} = \underline{ع} = [ع\ هـ]$ فمن تعريف تساوي مصفوفتين نجد أن :

$$\underline{ع} = ١١ص + ٢١س$$

$$\underline{ع} = ١١ص + ٢١س$$

أكمل بنفسك باقي عناصر $\underline{ع}$

واختصاراً فإن $\underline{هـ}$ هو العدد الناتج من ضرب الصف $ي$ من المصفوفة $\underline{ص}$ بالعمود $هـ$ من المصفوفة $\underline{س}$ أي أن :

$$\underline{ع\ هـ} = ١١ص + ٢١س + ٣١ص$$

$$\underline{هـ} = ١ , ٢ , ٣ \quad , \quad \underline{ي} = ١ , ٢$$

من الأمثلة السابقة نلاحظ ونستنتج مايلي :

(١) إن عدد أعمدة المصفوفة $\underline{س}$ يساوي عدد صفوف المصفوفة $\underline{ص}$ في كل من الأمثلة الخمسة

السابقة وجدير بالذكر أنه بصفة عامة لكي يكون حاصل ضرب مصفوفة $\underline{س}$ في أخرى $\underline{ص}$

ممكناً (معرفاً) فلا بد من أن يكون عدد أعمدة $\underline{ص}$ يساوي عدد صفوف $\underline{ص}$

(٢) إذا كانت $\underline{ص}$ من النوع $م \times ل$ ، $\underline{س}$ من النوع $ن \times ل$ فإن حاصل ضربيهما هو

المصفوفة $\underline{ص \cdot س}$ وتكون من النوع $م \times ن$ أي أن نوع المصفوفة $\underline{ص \cdot س}$ يتحدد تماماً

من عدد صفوف $\underline{ص}$ وعدد أعمدة $\underline{ص}$.

(٢) إذا كانت $\underline{س}$ ، $\underline{ص}$ مصفوفتين مربعيتين $م \times م$ فإن كلاً من $\underline{س}$ ، $\underline{ص}$ مصفوفة
 مربعة $م \times م$ وبصفة خاصة إذا كانت $\underline{س} = \underline{ص}$ فسنتكتب $\underline{س}$ بالصورة $\underline{س}^2$
 أي أن : $\underline{س} \cdot \underline{س} = \underline{س}^2$.

مثال (٢-١٢)

$$\text{إذا كانت } \underline{س} = \begin{bmatrix} ٣- & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix} ، \underline{ص} = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٢ \end{bmatrix} ،$$

فأوجد (إن أمكن) :

(٢) $\underline{س} \cdot \underline{ص}$. (ب) $\underline{ص} \cdot \underline{س}$. (ج) $\underline{س}^2$. (د) $\underline{ص}^2$.

الحل :

(٢) بما أن عدد أعمدة $\underline{س}$ يساوي عدد صفوف $\underline{ص}$ فإن $\underline{س} \cdot \underline{ص}$ يمكن إيجادها وتكون :

$$\underline{س} \cdot \underline{ص} = \begin{bmatrix} ٣- & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٦ & ٣- & ٤- \\ ١٢ & ٥ & ١٤ \end{bmatrix}$$

(ب) $\underline{ص} \cdot \underline{س}$ لا يمكن إيجادها ، لأن عدد أعمدة $\underline{ص}$ لا يساوي عدد صفوف $\underline{س}$.

$$(ج) \underline{س}^2 = \underline{س} \cdot \underline{س} = \begin{bmatrix} ٣- & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣- & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢١- & ٨- \\ ١٣ & ٢٨ \end{bmatrix}$$

(د) $\underline{\text{ص}} \cdot \underline{\text{ص}} = \underline{\text{ص}}$ لا يمكن إيجادها . (لماذا ؟)

مثال (٢-١٣) :

$$\text{باستخدام } \underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix} , \underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$$

أثبت أن عملية ضرب المصفوفات غير إبدالية .

الحل :

$$\underline{\text{س}} \cdot \underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٥ & ٢١ \\ ٢٠ & ١٢ \end{bmatrix} \quad (٥-٢)$$

$$\underline{\text{ص}} \cdot \underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٦ \\ ٣٥ & ٩ \end{bmatrix} \quad (٦-٢)$$

من (٥-٢) ، (٦-٢) نجد أن $\underline{\text{ص}} \cdot \underline{\text{س}} \neq \underline{\text{ص}} \cdot \underline{\text{س}}$

ولذلك تلاحظ أن هذا يكفي للإثبات .

مثال (٢-١٤) :

أوجد حاصل الضرب $\underline{\text{س}} \underline{\text{ص}}$ إذا كانت .

$$\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٦ & ٣ \end{bmatrix} , \underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٠ & ١- \end{bmatrix}$$

الحل :

$$\underline{\text{س}} \underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٦ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٠ & ١- \end{bmatrix}$$

ملحوظة (٢ - ٤)

في المثال (٢ - ١٤) يتبين أنه بالإمكان ضرب مصفوفتين غير صفريتين ليكون الناتج مصفوفة صفرية . وهذه الظاهرة مستحيلة في الأعداد الحقيقية ح كما ألفت ذلك من دراستك للرياضيات .

إن المثال الأخير والمثال الذي سبقه يبينان بعض أوجه الاختلاف لضرب المصفوفات عن الضرب في الأعداد الحقيقية وإن هذا يثير العديد من الأسئلة منها :

(١) هل يوجد عنصر محايد لعملية ضرب المصفوفات ؟

(٢) هل عملية الضرب تجميعية ؟ (٣) متى يوجد نظير ضرب لمصفوفة ؟

المثال التالي يوضح ، في حالة المصفوفات المربعة (من النوع $n \times n$) ، أن مصفوفة الوحدة I_n هي عنصر محايد بالنسبة لعملية الضرب . أما إجابة السؤال الثاني فهي بالإيجاب أي أن : $(S \cdot S) \cdot E = E \cdot (S \cdot S)$.

انظر إلى التمرين (٥ - هـ) من التمارين (٢ - ٣) لكي تتحقق من هذه المساواة بنفسك في حالة المصفوفات المعطاة في التمرين ، وحيث إن هذا التمرين هو مثال عددي ، فإنه لايعتبر إثباتاً ، كما تعلم ، وإن إثبات كون عملية الضرب تجميعية ليس صعباً ولكنه طويل ومليء بالرموز لذا فإننا لن نقدمه هنا . أما فيما يخص النظير الضربي لمصفوفة فإن البند القادم (٢ - ٥) سيتناول هذا الموضوع في حالة المصفوفات من النوع 2×2 .

مثال (٢ - ١٥) :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \underline{M} , \quad \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} = \underline{S}$$

فأثبت أن : $\underline{S} \cdot \underline{M} = \underline{M} \cdot \underline{S} = \underline{S}$

ماذا تستنتج من ذلك ؟

الحل :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21س & 11س \\ 22س & 12س \end{bmatrix} = \underline{م} \cdot \underline{س}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \times 21س + 0 \times 11س & 0 \times 21س + 1 \times 11س \\ 1 \times 22س + 0 \times 12س & 0 \times 22س + 1 \times 12س \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 21س & 11س \\ 22س & 12س \end{bmatrix} =$$

$$\underline{س} =$$

بالمثل نجد أن : $\underline{م} \cdot \underline{س} = \underline{س}$

نستنتج أن $\underline{م} = \underline{س}$ مصفوفة محايدة بالنسبة لعملية ضرب المصفوفات

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \underline{م}$$

المربعة من النوع 2×2

تدريب (٧ - ٢)

في المثال (١٥ - ٢) أثبت أن $\underline{م} \cdot \underline{س} = \underline{س}$

مثال (١٦ - ٢) :

إذا علمت أن :

$$\begin{bmatrix} 1س \\ 2س \\ 3س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1- & 0 & 1 \\ 3 & 2- & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

فأوجد كلاً من s_1 ، s_2 ، s_3 .

الحل :

$$s_1 = (2-) \times (1-) + 0 \times 0 + 4 \times 1 = 6$$

$$s_2 = (2-) \times 2 + 0 \times (2-) + 4 \times 0 = 16-$$

$$s_3 = (2-) \times 0 + 0 \times 1 + 4 \times 2 = 13$$

مثال (٢-١٧) :

إذا علمت أن s_1 مصفوفة من النوع 2×2 ، s_2 مصفوفة من النوع 2×2 فأوجد نوع كل من المصفوفات الآتية :

(P) $s_1 s_2$ (ب) $s_1 s_2$ (ج) $(s_1 s_2)$ (د) $(s_1 s_2)$

الحل :

(P) $s_1 s_2$ مصفوفة 2×2 ، $s_1 s_2$ مصفوفة 2×2 \Leftarrow $s_1 s_2$ مصفوفة 2×2

(ب) $s_1 s_2$ مصفوفة 2×2 ، $s_1 s_2$ مصفوفة 2×2 \Leftarrow $s_1 s_2$ مصفوفة 2×2

(ج) $s_1 s_2$ مصفوفة 2×2 (من (P)) ، $s_1 s_2$ مصفوفة 2×2 \Leftarrow $(s_1 s_2)$ مصفوفة 2×2

(د) $(s_1 s_2)$ مصفوفة 2×2 (من (ب)) ، $s_1 s_2$ مصفوفة 2×2 \Leftarrow $(s_1 s_2)$ مصفوفة 2×2

مثال (٢-١٨) :

إذا كانت $s = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ فأثبت أن :

$$s^2 - 2s + I = 0$$

الحل :

$$\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\text{س ٢}}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\text{س ٢}} \text{ ، } \begin{bmatrix} 9- & 3- \\ 6- & 0 \end{bmatrix} = \underline{\text{س ٣}}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9- & 3- \\ 6- & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \text{إذن الطرف الأيمن} =$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} =$$
$$\text{الطرف الأيسر} = \underline{\quad} =$$

تمارين (٢-٣)

(١) إذا كانت $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\text{س}}$ ، $\begin{bmatrix} 1- & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\text{ص}}$ ، $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1- & 0 \end{bmatrix} = \underline{\text{ع}}$ ، فأوجد :

- (٢) $\underline{\text{س}}$ $\underline{\text{ص}}$ (ب) $\underline{\text{س}}$ $\underline{\text{ع}}$ (د) $\underline{\text{ص}}$ $\underline{\text{س}}$ (ج) $\underline{\text{س}}$ $\underline{\text{ص}}$ (هـ) $\underline{\text{ع}}$ $\underline{\text{س}}$ (و) $\underline{\text{ع}}$ $\underline{\text{ص}}$ (ز) $\underline{\text{س}}$ $\underline{\text{ص}}$ (ح) $\underline{\text{س}}$ $\underline{\text{ص}}$ (د) $\underline{\text{ص}}$ $\underline{\text{س}}$

(٢) إذا كانت $\underline{\text{س}}$ ، $\underline{\text{ص}}$ ، $\underline{\text{ع}}$ كما في التمرين (١) السابق وكانت $\underline{\text{م}}$ هي مصفوفة الوحدة فاثبت أن :

- (٢) $\underline{\text{س}}$ $\underline{\text{ص}}$ = - ($\underline{\text{ص}}$ $\underline{\text{س}}$) (ب) $\underline{\text{س}}$ $\underline{\text{ع}}$ = $\underline{\text{ع}}$ $\underline{\text{س}}$ (د) $\underline{\text{ص}}$ $\underline{\text{ع}}$ = $\underline{\text{ع}}$ $\underline{\text{ص}}$ (ج) $\underline{\text{ص}}$ $\underline{\text{ع}}$ = $\underline{\text{ع}}$ $\underline{\text{ص}}$ (د) $\underline{\text{س}}$ $\underline{\text{ص}}$ = $\underline{\text{ع}}$ $\underline{\text{س}}$ خاصية التجميع .

(٣) إذا كانت P مصفوفة 3×2 ، P مصفوفة 3×3 ، P مصفوفة 3×4 ، P مصفوفة

2×3 . فأوجد نوع كلٍ من المصفوفات الآتية :

$$(P) \quad P \quad (ب) \quad P \quad (ج) \quad P \quad (د) \quad P$$

$$(هـ) \quad P \quad (و) \quad (P) \quad (ز) \quad (P) \quad (ح) \quad P$$

(٤) أجز عملية الضرب فيما يأتي ، إن أمكن ، واذكر السبب في حالة تعذر إجراء عملية الضرب :

$$(P) \quad \begin{bmatrix} 5 \\ \cdot \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(ب) \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(ج) \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 8 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(د) \quad \begin{bmatrix} 4 & \cdot & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & \cdot \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(هـ) \quad \begin{bmatrix} 3 & \cdot & 2 & 1 \\ \cdot & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(و) \quad \begin{bmatrix} \cdot & 1 & 9 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(ز) \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & \cdot \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(ح) \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & \cdot \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(٢ - ٥) النظر الضربي لمصفوفة :

سنكتفي في هذا البند بدراسة النظر الضربي لمصفوفة مربعة من النوع 2×2 وسنجيب على الأسئلة الآتية : متى يوجد نظير ضربي ؟ هل هو وحيد ؟ وكيف نحصل عليه ؟
نبدأ بتعريف النظر الضربي :

تعريف (٢ - ٧) :

النظر الضربي لمصفوفة P من النوع 2×2 إن وجد ، هو مصفوفة P^{-1} من النوع نفسه ، بحيث يكون : $P \cdot P^{-1} = P^{-1} \cdot P = I$ ، و حيث I هي المصفوفة المحايدة بالنسبة لعملية الضرب (أي مصفوفة الوحدة من النوع 2×2) .

سنرمز للنظر الضربي لمصفوفة P بالرمز P^{-1} (أي أن $P^{-1} = P^{-1}$ في التعريف ٢ - ٧)
لأجل الإجابة على السؤال : متى يوجد نظير ضربي لمصفوفة مربعة ؟ نعلم إلى تقديم تعريف المحددة وهي فكرة مهمة جداً في موضوعنا هذا ، فنبدأ بتعريف المحددة لمصفوفة من النوع 2×2

تعريف (٢ - ٨) :

إذا كانت $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ فإن محددة المصفوفة P ويرمز لها بالرمز :
 $|P|$ هي المقدار : $d - b \cdot c$.

في بعض الأحيان يستعمل الرمز Δ (ويقرأ دلتا) للدلالة على المحددة $|P| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ،
ومن السهل أن تلاحظ أن المقدار $P = d - b \cdot c$ هو حاصل ضرب العنصرين الواقعين . في القطر الأساسي للمصفوفة P مطروحاً منه حاصل ضرب العنصرين الواقعين في القطر الآخر . كما نرجو الانتباه هنا إلى أن الخطين : $|$ لا يرمزان إلى القيمة المطلقة .

مثال (٢-١٩) :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1- \\ \frac{3}{2}- & 1 \end{bmatrix} = \underline{ب} , \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \underline{پ} \text{ إذا كان}$$

فأوجد : (پ) محددة $\underline{پ}$ ، (ب) محددة $\underline{ب}$ (ح) $\underline{پ} \underline{ب}$ ، (د) $\underline{پ} \underline{ب}$

ماذا تستنتج من الفقرتين (ح) ، (د) ؟

الحل :

$$2- = 4 \times 2 - 2 \times 3 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \underline{پ} \text{ محددة (پ)}$$

$$\frac{1}{2}- = 1 \times 2 - \left(\frac{3}{2}- \right) \times (1-) = \begin{vmatrix} 2 & 1- \\ \frac{3}{2}- & 1 \end{vmatrix} = \underline{ب} \text{ محددة (ب)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1- \\ \frac{3}{2}- & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \underline{ب} \cdot \underline{پ} \text{ (ح)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1- \\ \frac{3}{2}- & 1 \end{bmatrix} = \underline{پ} \cdot \underline{ب} \text{ (د)}$$

تستنتج من الفقرتين (ح) ، (د) أن كلا من $\underline{پ}$ و $\underline{ب}$ نظير ضربى للأخرى ، أي أن :

$\underline{پ}^{-1} = \underline{ب}$ ، $\underline{ب}^{-1} = \underline{پ}$ وذلك وفق التعريف (١-٧) . النظرية القادمة تعطينا طريقة لإيجاد

النظير الضربى لمصفوفة في حالة وجوده .

نظرية (١-٢) :

إذا كانت $P = \begin{bmatrix} b & p \\ d & c \end{bmatrix}$ فإن النظير الضربي للمصفوفة P يكون موجوداً عندما تكون محددة $P = \Delta \neq 0$ صفراً وعندئذ فإن :

$$\begin{bmatrix} \frac{b}{\Delta} & \frac{d}{\Delta} \\ \frac{p}{\Delta} & \frac{c}{\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & -d \\ p & -c \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta} = P^{-1}$$

البرهان

لنفرض أن $P = \begin{bmatrix} b & -d \\ p & -c \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta}$ ، حيث $\Delta =$ محددة $P = p - d - b - c$.

$$\begin{bmatrix} b & -d \\ p & -c \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} b & p \\ d & c \end{bmatrix} = P \cdot P^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} bp + b(-c) & bp - d(-c) \\ pd + p(-c) & pd - d(-c) \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$(1) \dots\dots\dots I =$$

وبالمثل

$$\begin{bmatrix} b & p \\ d & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & -d \\ p & -c \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta} = P \cdot P^{-1}$$

$$\frac{1}{\Delta} = \begin{bmatrix} d - db & d - db \\ -db + dp & -db + dp \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\Delta} = \begin{bmatrix} \cdot & \Delta \\ \Delta & \cdot \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix}$$

$$= \dots \dots \dots \underline{p} \quad (2)$$

من (1) ، (2) ينتج أن \underline{p} هي النظير الضربي للمصفوفة \underline{p} ، أي أن :

$$\begin{bmatrix} \frac{\underline{p}}{\Delta} & \frac{d}{\Delta} \\ \frac{p}{\Delta} & \frac{-c}{\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{p} & - \\ - & \underline{p} \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta} = \underline{p} = \underline{p}^{-1}$$

وأن \underline{p} هي النظير الضربي للمصفوفة \underline{p} (لماذا ؟)

ملحوظة (2 - 5)

من أجل الحصول على النظير الضربي لمصفوفة \underline{p} نتبع الخطوات الآتية :

(1) نوجد $\Delta =$ محددة \underline{p} فإن كانت صفراً نتوقف ونقول إنه لا يوجد نظير

ضربي للمصفوفة \underline{p} .

وإذا كانت محددة $\underline{p} \neq$ صفراً فإنه حسب النظرية (2 - 1) يوجد نظير ضربي

للمصفوفة \underline{p} وعندئذ نتحول إلى الخطوة التالية :

(2) نبادل بين وضعي العنصرين الواقعين على القطر الأساسي للمصفوفة \underline{p} .

(3) نغير إشارة كل من العنصرين الواقعين على القطر الآخر للمصفوفة .

(4) نضرب المصفوفة الناتجة من إجراء (2) ، (3) بالعدد $\frac{1}{\Delta}$ فنحصل على \underline{p}^{-1}

تدريب (٢ - ٨)

طبق الطريقة الواردة في الملاحظة (٢ - ٥) لإثبات أن كلا من \underline{P} و \underline{B} الواردتين في المثال

(٢ - ١٩) هو النظير الضربي للآخر .

مثال (٢ - ٢٠) :

$$\text{إذا كانت : } \underline{P} = \begin{bmatrix} ٠ & \sqrt{٧} \\ ١- & ٢ \end{bmatrix} , \underline{B} = \begin{bmatrix} ٠ & \text{س} \\ \text{ص} & ٠ \end{bmatrix}$$

حيث : $\text{س ص} \neq ٠$. فاثبت أنه لكل من \underline{P} ، \underline{B} ، $\underline{P} \cdot \underline{B}$ نظير ضربي وأوجدته .

الحل :

نطبق الخطوات الواردة في الملاحظة (٢ - ٥) .

بالنسبة للمصفوفة \underline{P}

$$(١) \text{ محددة } \underline{P} = \begin{vmatrix} ٠ & \sqrt{٧} \\ ١- & ٢ \end{vmatrix} = \sqrt{٧} \neq ٠ \text{ صفراً}$$

إذن للمصفوفة \underline{P} نظير ضربي .

الخطوتان (٢) ، (٣) من الملاحظة تعطينا المصفوفة .

$$\begin{bmatrix} ٠ & ١- \\ \sqrt{٧} & ٢- \end{bmatrix}$$

$$\text{الخطوة (٤) تعطينا : } \underline{P}^{-١} = \begin{bmatrix} ٠ & \frac{١}{\sqrt{٧}} \\ ١- & \frac{٢}{\sqrt{٧}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١- \\ \sqrt{٧} & ٢- \end{bmatrix} \frac{١}{\sqrt{٧}}$$

بالنسبة للمصفوفة \underline{B} فباختصار نلاحظ أن محددة $\underline{B} = \text{س ص} \neq ٠$ صفراً من الفرض

فيكون النظير الضربي للمصفوفة \underline{B} هو :

$$\underline{B}^{-١} = \frac{١}{\text{س ص}} \begin{bmatrix} ٠ & \text{ص} \\ \text{س} & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & \frac{١}{\text{س}} \\ \frac{١}{\text{ص}} & ٠ \end{bmatrix}$$

إن هذا يعني أنه إذا كانت \underline{P} مصفوفة قطرية عناصرها مغايرة للصفر فإن نظيرها الضربي مصفوفة قطرية أيضا ، وعناصر قطرها هي مقلوبات عناصر القطر في \underline{P} .
 بالنسبة للمصفوفة \underline{P} . \underline{P} .

$$\text{فإن } \underline{P} \cdot \underline{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1- & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & س \\ ص & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7س \\ ص & 2س \end{bmatrix} =$$

محددة المصفوفة \underline{P} هي $7س - ص$
 باتباع خطوات إيجاد النظير للمصفوفة \underline{P} . نجد أن :

$$\underline{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{7س} \\ \frac{1}{ص} - & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

تدريب (٢ - ٩)

في المثال (٢ - ٢٠) :

$$1 - \text{هل صحيح أن : } \underline{P}^{-1} \underline{P}^{-1} = \underline{P}^{-1} \underline{P}^{-1}$$

إذا لم يكن كذلك فما هو الشرط على $س$ ، $ص$ كي يكون هذا صحيحاً ؟

$$2 - \text{هل صحيح أن : } \underline{P}^{-1} \underline{P}^{-1} = \underline{P}^{-1} \underline{P}^{-1} \text{ ؟}$$

$$3 - \text{تحقق أن : } \underline{P}^{-1} \underline{P}^{-1} = \underline{P}^{-1} \underline{P}^{-1} = \underline{P}^{-1} \underline{P}^{-1} \underline{P}^{-1} \underline{P}^{-1}$$

ملحوظة (٢ - ٦)

في المثال (٢ - ٢٠) لعلك تلاحظ أن :

محددة \underline{P} × محددة \underline{P}^{-1} = محددة \underline{P}^{-1} \underline{P} (تحقق من ذلك) إن برهان هذه الحقيقة في

حالة المصفوفات من النوع 2×2 أمر يسير نتركه للطالب في التمرين (٨) من التمارين العامة ، لكن الذي يهمنا هنا هو بيان ما يمكن أن نستنتجه من هذه الحقيقة .

لنفرض أنه يوجد نظير ضربى للمصفوفة P التي هي من النوع 2×2 فيكون :

$$\underline{P} \times \underline{P}^{-1} = \underline{I} \quad \text{ومنه نجد أن : محدة } \underline{P} \times \text{ محدة } \underline{P}^{-1} = \text{ محدة } (\underline{P}^{-1} \underline{P}) = \text{ محدة } \underline{I} = 1$$

$$\text{محدة } \underline{P}^{-1} = \frac{1}{\text{محدة } \underline{P}}$$

فينتج أن : محدة $\underline{P}^{-1} = \frac{1}{\text{محدة } \underline{P}}$

كذلك نستنتج أنه إذا وجد نظير ضربى لمصفوفة P فإن محدة $P \neq 0$. وهو عكس الشرط الموضوع . في النظرية (٢ - ١) .

مثال (٢١ - ٢) :

أي من المصفوفات الآتية لها نظير ضربى ؟ أوجده في حالة الإيجاب .

(٢) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

الحل :

(٢) المحدة = $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$ صفر

إذن لهذه المصفوفة نظير ضربى هو :

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{8}$$

$$\begin{vmatrix} 10 & 2- \\ 0 & 1- \end{vmatrix} = \Delta = \text{المحددة (ب)}$$

$$(1- \times 10) - 0 \times (2-) = \\ = -10 = \text{صفر}$$

إذن ليس للمصفوفة نظير ضربى .

$$\begin{vmatrix} 1- & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \Delta = \text{المحددة (ج)} = 2 \neq \text{صفر}$$

إذن لهذه المصفوفة نظير ضربى هو :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1- \end{bmatrix} \frac{1}{2}$$

$$\begin{vmatrix} 10 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = \Delta = \text{المحددة (د)}$$

$$= 10 \times 3 - 0 \times 6 = \text{صفر}$$

إذن ليس لهذه المصفوفة نظير ضربى .

مثال (٢٢-٢) :

احسب قيم س التي تجعل المصفوفة الآتية ليس لها نظير ضربى .

$$\begin{bmatrix} س & 2-س \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل :

ليس للمصفوفة أعلاه نظير ضربى عندما تكون محددها = صفراً

$$= 0 = \begin{vmatrix} س & 2-س \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2s - 2s - 4$$

$$= -s - 4 = 0$$

إذن $s = 4$. أي عند هذه القيمة لا يوجد نظير ضربى للمصفوفة المعطاة .

تدريب (٢ - ١٠)

احسب قيم s التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} 4 & s \\ s & 9 \end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربى

تمارين (٢-٤)

(١) أوجد النظير الضربى لكل من المصفوفات الآتية إن أمكن ذلك :

$$(P) \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (ب) \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(ح) \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (د) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(هـ) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (و) \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(ز) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (ح) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{علماً بأن } P \neq 0$$

(٢) أحسب قيم s التي تجعل كلاً من المصفوفات الآتية ليس لها نظير ضربى:

$$(P) \begin{bmatrix} 2 & s \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad (ب) \begin{bmatrix} 9 & s \\ s & 4 \end{bmatrix}$$

$$(ح) \begin{bmatrix} 4 & s \\ s & 2 \end{bmatrix} \quad (د) \begin{bmatrix} 1 & s \\ 1 & s-2 \end{bmatrix}$$

$$(٣) \text{ إذا كانت } \underline{س} = \begin{bmatrix} ١٢- & ٣ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$\text{فأثبت أن } \underline{س}^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & \frac{١}{٣} \\ \frac{١}{٤} & ٠ \end{bmatrix}$$

$$(٤) \text{ إذا كانت } \underline{ص} = \begin{bmatrix} ٢- & ٢ \\ ب & ٠ \end{bmatrix}$$

$$\text{فأثبت أن } \underline{ص}^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{ب} & ٠ \end{bmatrix} \text{ علماً بأن } ٢ \neq ب \neq ٠$$

$$(٥) \text{ إذا كانت } \underline{پ} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١- & ٠ \end{bmatrix} \text{ ، فأثبت أن } \underline{پ}^{-١} = \underline{پ}$$

$$(٦) \text{ إذا كانت } \underline{س} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} \text{ ، } \underline{ص} = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٣ & ٨ \end{bmatrix}$$

فأجب عما يلي :

(٢) احسب كلاً من $\underline{س}^{-١}$ ، $\underline{ص}^{-١}$

(ب) أوجد $\underline{س}^{-١}$ $\underline{ص}^{-١}$ وكذلك $\underline{ص}^{-١}$ $\underline{س}^{-١}$

(ج) أوجد $\underline{س} \cdot \underline{ص}$ ومن ثم أوجد $(\underline{س} \underline{ص})^{-١}$

(د) أوجد $\underline{ص} \cdot \underline{س}$ ومن ثم تحقق أن $\underline{س} \cdot \underline{ص} \neq \underline{ص} \cdot \underline{س}$

(هـ) أثبت أن $(\underline{س} \underline{ص})^{-١} \neq \underline{ص}^{-١} \underline{س}^{-١}$ ، مستفيداً من الفقرتين (ب) ، (ج)

(و) أثبت أن $(\underline{ص} \underline{س})^{-١} = \underline{س}^{-١} \underline{ص}^{-١}$ ، مستفيداً من الفقرتين (ب) ، (ج)

(٧) إذا كان $\underline{س}$ نظير ضربى ، فبرهن على أن $\underline{س}$ هي النظير الضربى للمصفوفة $\underline{س}^{-١}$

أي أن $(\underline{س}^{-١})^{-١} = \underline{س}$

٢ - ٦ بعض التطبيقات البسيطة على المصفوفات :

أولاً : حل نظام معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين :

إذا أعطينا نظام المعادلتين :

$$(٧ - ٢) \dots\dots \begin{cases} P \text{ س} + ب \text{ ص} = ل \\ ح \text{ ص} + د \text{ ص} = ك \end{cases}$$

فإنه يمكن كتابتها بالصيغة المصفوفية التالية :

$$(٨ - ٢) \dots\dots \begin{bmatrix} ل \\ ك \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ب & د \\ ح & د \end{bmatrix}$$

وإذا فرضنا :

$$\begin{bmatrix} ل \\ ك \end{bmatrix} = \underline{\underline{P}} \quad \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \underline{\underline{S}} \quad \begin{bmatrix} ب & د \\ ح & د \end{bmatrix} = \underline{\underline{P}}$$

فإنه يمكن كتابة المعادلتين في (٧ - ٢) بمعادلة مصفوفية واحدة على الهيئة :

$$(٩ - ٢) \quad \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{P}}$$

تسمى المصفوفة $\underline{\underline{P}}$ مصفوفة المعاملات ، $\underline{\underline{S}}$ مصفوفة المجاهيل ، $\underline{\underline{P}}$ مصفوفة الثوابت

إذا كانت محددة $\underline{\underline{P}} \neq$ صفراً ، أي $\Delta = د - ب ح \neq ٠$

فمن الممكن إيجاد حل للمعادلة (٩ - ٢) كما يلي :

$$\underline{\underline{P}}^{-١} \underline{\underline{P}} = (\underline{\underline{S}} \underline{\underline{P}}) \underline{\underline{P}}^{-١} \underline{\underline{P}} \quad \underline{\underline{P}}^{-١} \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{P}} \underline{\underline{P}}^{-١} \underline{\underline{P}}$$

$$\underline{\underline{P}}^{-١} \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{P}} \underline{\underline{P}}^{-١} \underline{\underline{P}} \quad \underline{\underline{P}}^{-١} \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{P}} \underline{\underline{P}}^{-١} \underline{\underline{P}}$$

$$\underline{\underline{P}}^{-١} \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{P}} \underline{\underline{P}}^{-١} \underline{\underline{P}} \quad \underline{\underline{P}}^{-١} \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{P}} \underline{\underline{P}}^{-١} \underline{\underline{P}}$$

$$\underline{\underline{P}}^{-١} \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{P}} \underline{\underline{P}}^{-١} \underline{\underline{P}} \quad \underline{\underline{P}}^{-١} \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{P}} \underline{\underline{P}}^{-١} \underline{\underline{P}}$$

وواضح أن بمقدورنا الآن إيجاد المجهولين س ، ص (اللذين يشكلان حل نظام المعادلتين

الأصليتين) بدلالة الثوابت العددية P ، ب ، ح ، د ، ل ، ك

ملحوظة (٢ - ٧)

إشارة إلى الملحوظة (٢ - ٤) الواردة في البند (٢ - ٤) نود الملاحظة أن طريقة تعريف ضرب المصفوفات بالأسلوب المذكور في البند (٢ - ٤) مكنتنا من تحويل نظام المعادلتين (٢ - ٧) ، إلى الصيغة المصفوفية (٢ - ٨) وهو أمر يجعل للمصفوفات أهمية كبيرة في حل أنظمة المعادلات الخطية .

مثال (٢ - ٢٣) :

حل نظام المعادلتين الآتيتين باستخدام المصفوفات وتحقق من الناتج :

$$٤ \text{ س} + ٥ \text{ ص} = ١ ، \quad ٣ \text{ س} + ٦ \text{ ص} = ٢$$

الحل :

نكتب المعادلة المصفوفية $\underline{P} \underline{S} = \underline{C}$ ، حيث

$$\begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix} = \underline{C} ، \quad \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \underline{S} ، \quad \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٦ & ٣ \end{bmatrix} = \underline{P}$$

$$\text{محددة } \underline{P} = \Delta = \begin{vmatrix} ٥ & ٤ \\ ٦ & ٣ \end{vmatrix} = ٩$$

إذن يوجد نظير ضربي $\underline{P}^{-١}$ ويكون الحل :

$$\underline{S} = \underline{P}^{-١} \underline{C}$$

$$\begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥- & ٦- \\ ٤ & ٣- \end{bmatrix} \frac{١}{٩} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{٤}{٩}- \\ \frac{٥}{٩} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤- \\ ٥ \end{bmatrix} \frac{١}{٩} =$$

أي أن $s = -\frac{4}{9}$ ، $v = \frac{5}{9}$ هو الحل .

التحقيق :

بالتعويض المباشر في المعادلتين أعلاه بقيمتي s ، v نجد أن :

$$1 = \frac{9}{9} = \frac{5}{9} \times 5 + \left(-\frac{4}{9} \right) \times 4$$

$$2 = \frac{18}{9} = \frac{5}{9} \times 6 + \left(-\frac{4}{9} \right) \times 3$$

مثال (٢٤-٢) :

حل نظام المعادلتين الآتيتين مستخدماً المصفوفات

$$(10-2) \dots\dots\dots = 1 + 2ص + 3س$$

$$(11-2) \dots\dots\dots 7 + ص = 5س$$

الحل :

نكتب المعادلتين (١٠ - ٢) و (١١ - ٢) على الصورة التالية :

$$1 = 2ص + 3س ، 7 = 5ص + س$$

فتكون المعادلة المصفوفية هي $\underline{P} \underline{S} = \underline{C}$ ، حيث :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \underline{C} ، \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \underline{S} ، \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \underline{P}$$

$$\Delta = \underline{P} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 10 = -7 \neq 0$$

⇐ يوجد نظير ضربي \underline{P}^{-1}

$$\underline{S} = \underline{P}^{-1} \underline{C} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \underline{S}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{}} =$$

$$\begin{bmatrix} 26 \\ 15 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{}} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{26}{\sqrt{}} \\ \frac{15}{\sqrt{}} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{15}{\sqrt{}} = \text{ص} , \quad \frac{26}{\sqrt{}} = \text{س} \quad \text{أي أن : س = } \frac{26}{\sqrt{}} , \text{ ص = } \frac{15}{\sqrt{}}$$

ثانياً : تطبيقات متنوعة :

مثال (٢٥-٢) :

تعهد مقاول أن يبني منازل وفق نموذجين P ، ب في كل من الرياض ومكة المكرمة وجدة ، فإذا تمكن في العام الأول من بناء :

١٣ منزلاً في الرياض من النموذج P ،

٢٠ منزلاً في الرياض من النموذج ب ،

١٨ منزلاً في مكة المكرمة من النموذج P ،

١١ منزلاً في مكة المكرمة من النموذج ب ،

١٦ منزلاً في جدة من النموذج P ،

١٢ منزلاً في جدة من النموذج ب ،

ويمكن في العام الثاني من بناء أربعة أمثال ما بناه من كل نموذج في كل مدينة . فالمطلوب :

(P) تمثيل ما بناه في العام الأول في مصفوفة .

- (ب) تمثيل ما بناه في العام الثاني بمصفوفة .
 (ح) تمثيل ما بناه في العامين معاً بمصفوفة .
 (د) إذا كان المنزل الواحد من النموذج P يكلف س ريالاً .
 بينما يكلف المنزل الواحد من النموذج ب ، ص ريالاً ، فاكتب مصفوفة تمثل مجموع
 التكاليف الكلية لكل نموذج على حدة في كل مدينة .

الحل :

(P) يمكن أن نوجز المعلومات في مصفوفة \underline{P} من النوع 3×2 ، بحيث يمثل الصف
 الأول منها عدد المنازل في الرياض والصف الثاني عدد المنازل في مكة المكرمة والصف الثالث
 عدد المنازل في جدة . بينما يمثل العمود الأول من \underline{P} عدد المنازل من النموذج P ، والعمود
 الثاني عدد المنازل من النموذج ب وبذلك نكتب .

$$\begin{bmatrix} 20 & 13 \\ 11 & 18 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} = \underline{P}$$

(ب) المصفوفة المطلوبة = \underline{P}_4

(ح) المصفوفة المطلوبة = $\underline{P}_4 + \underline{P}$

$$\underline{P}_5 =$$

(د) المصفوفة المطلوبة = \underline{P}_5 $\underline{س}$ وذلك بفرض أن $\underline{س} =$ مصفوفة التكلفة $\begin{bmatrix} \underline{س} \\ \underline{ص} \end{bmatrix}$

ونترك للطالب كتابة المصفوفات في (ب) ، (ح) ، (د) بشكل تفصيلي

مثال (٢٦-٢) :

خمسة طلاب P ، ب ، ح ، د ، هـ كانت درجاتهم على الترتيب كما يلي :

في الرياضيات = ٥٦ ، ٤٥ ، ٥٥ ، ٦٣ ، ٧٠

في الفيزياء = ٥٠ ، ٦٠ ، ٦٥ ، ٧٢ ، ٤٦

في الكيمياء = ٦٦ ، ٤٧ ، ٦٠ ، ٥٠ ، ٣٠

المطلوب :

- (پ) تمثيل هذه المعلومات في مصفوفة 5×3
- (ب) إذا كانت الدرجات السابقة محسوبة من 100 وكانت الدرجة اللازمة للنجاح في الرياضيات 60 ، الفيزياء 50 ، الكيمياء 50 فكم طالباً رسب في الرياضيات ؟ وكم طالباً رسب في الفيزياء وكم طالباً رسب في الرياضيات والفيزياء معاً ؟ وكم طالباً رسب في الرياضيات والكيمياء معاً ؟ وكم طالباً رسب في الفيزياء والكيمياء ؟ وكم طالباً رسب في المواد الثلاثة ؟ وكم طالباً نجح في المواد الثلاثة ؟
- (ح) إذا زادت درجات الطلاب الخمسة بنسبة 10٪ في المواد الثلاثة فاكتب مصفوفة تمثل هذه الزيادة .
- (د) اكتب مصفوفة تمثل درجاتهم بعد الزيادة ومنها حدد الطلاب الراسبين في كل مادة . وكم طالباً نجح في المواد الثلاث معاً .

الحل :

- (پ) المصفوفة المطلوبة من النوع 5×3 ، يعني أن المواد الثلاث تمثل على الترتيب بصفوف المصفوفة ، بينما الطلاب الخمسة يمثلون على الترتيب بأعمدة المصفوفة .
- نفرض أن س هي المصفوفة المطلوبة ونكتب .

$$\begin{bmatrix} 70 & 63 & 55 & 45 & 56 \\ 46 & 72 & 65 & 60 & 50 \\ 30 & 50 & 60 & 47 & 66 \end{bmatrix} = \underline{\text{س}}$$

- (ب) من المصفوفة س يمكن معرفة المعلومات المطلوبة ونلخصها في الجدول الآتي :

المادة	ر	ف	ك	ر ، ف	ر ، ك	ف ، ك	المواد الثلاث
عدد الراسبين	3	1	2	0	1	1	0

حيث ر ترمز للرياضيات ، ف للفيزياء ، ك الكيمياء .

عدد الطلاب الناجحين في المواد الثلاث كلها = ١

$$(ح) \text{ مصفوفة الزيادة} = \frac{1}{\text{س}}$$

(د) المصفوفة التي تمثل درجات الطلاب بعد الزيادة هي :

$$\begin{bmatrix} ٧٧ & ٦٩.٣ & ٦٠.٥ & ٤٩.٥ & ٦١.٦ \\ ٥٠.٦ & ٧٩.٢ & ٧١.٥ & ٦٦ & ٥٥ \\ ٣٣ & ٥٥ & ٦٦ & ٥١.٧ & ٧٢.٦ \end{bmatrix} = \frac{1}{\text{س}} + \underline{\text{س}}$$

ومن هذه المصفوفة الجديدة نجد أن :

المادة	ر	ف	ك
الراسبون	١	صفر	١

عدد الطلاب الناجحين في المواد الثلاثة = ٣

تمارين (٢-٥)

(١) استخدم المصفوفات في إيجاد حل كل نظام من معادلات الدرجة الأولى الآتية :

$$(٢) \text{ س} + \text{ص} = ١ , \quad ٢ \text{ س} + ٣ \text{ ص} = ٢$$

$$(ب) \text{ س} + ٢ \text{ ص} = ٥ , \quad ٣ \text{ س} + \text{ص} = ٣$$

$$(ح) \text{ س} - ٥ \text{ ع} = ٢٧ , \quad ٦ \text{ ع} - ٢ \text{ س} = ١٠$$

$$(د) \text{ س} - ٣ \text{ ص} = ١ , \quad ٣ \text{ ص} - ٢ \text{ س} = ٢$$

$$(هـ) \text{ س} - \text{ب} = \text{ب} , \quad \text{ب} - \text{س} = \text{س} - \text{ب} , \quad \text{حيث } \text{ب} \neq \text{س}$$

$$(و) \frac{1}{٣} \text{ س} + \frac{1}{٣} \text{ ص} = ١ , \quad \frac{1}{٣} \text{ س} + \frac{1}{٤} \text{ ص} = ٧$$

(٢) تمتلك شركة صناعية ٣ مصانع لإنتاج جهاز إلكتروني يتكون من أربعة أجزاء مختلفة
 P ، ب ، د ، ح ، فإذا كان المصنع الأول ينتج ٣٥ قطعة من P ، ٤٣ قطعة من ب ، ٣٧ قطعة من
 د ، ١٦ قطعة من د يومياً ، وكان المصنع الثاني ينتج ٢٥ قطعة من P ، ٣٦ قطعة من
 ب ، ٤١ قطعة من ح ، ١٢ قطعة من د يومياً ، أما المصنع الثالث فينتج يومياً ٦٥ قطعة
 من P ، ٥٥ قطعة من ب ، ٧٥ قطعة من د ، ٤٠ قطعة من د ، فالمطلوب :

(P) وضع هذه المعلومات في مصفوفة من النوع 3×4

(ب) وضع هذه المعلومات في مصفوفة من النوع 4×3

(ح) كتابة مصفوفة تمثل إنتاج المصانع الثلاثة لمدة ٣٠ يوماً

(د) إذا كانت الشركة تباع كل قطعة من المصنع الأول بمبلغ ١٠٠ ريالاً وكل قطعة من
 المصنع الثاني بمبلغ ١٠٠ ريالاً وكل قطعة من المصنع الثالث بمبلغ ١٠٠ ريالاً ،
 فاكتب مصفوفة تمثل دخل الشركة اليومي من بيع القطع P ، ب ، د ، ح ، في
 مصانعها الثلاثة معاً .

(٣) ثلاثة طلاب يتنافسون للحصول على درجات عالية في الفصل ، وقد اتفقوا كما يلي :

إذا تغلب P على ب فإن ب يشتري هدية لزميله P بمبلغ ١٠٠ ريال

وإذا تغلب P على ح فإن ح يشتري هدية لزميله P بمبلغ ٨٠ ريالاً

وإذا تغلب ب على P فإن P يشتري هدية لزميله ب بمبلغ ٩٠ ريالاً

وإذا تغلب ب على د فإن د يشتري لزميله ب هدية بمبلغ ٧٥ ريالاً

وإذا تغلب د على P فإن P يشتري هدية لزميله د بمبلغ ٨٠ ريالاً

وإذا تغلب د على ب فإن ب يشتري لزميله د هدية بمبلغ ٩٠ ريالاً

المطلوب :

تمثيل هذه المعلومات بمصفوفة ، بحيث يكون الفائز في مبدأ كل صف والخاسر في مقدمة كل

عمود . وإذا رمزنا لهذه المصفوفة بالرمز $S = [s_{ij}]$ ، فماذا تساوي s_{ij} ؟ وهل

$s_{ij} = s_{ji}$ لجميع قيم i ، j الممكنة ؟

(٤) يوجد ثلاثة طرق تؤدي من P إلى Q وطريق واحد يؤدي من B إلى Q ، وطريق واحد من C إلى Q . كما يوجد طريق واحد من P إلى K ، ويوجد طريق واحد من B إلى K ، وهناك ثلاثة طرق من C إلى K والمطلوب :

(P) عبر عن المعلومات بمصفوفة ، صفوفها الأماكن P ، B ، C وأعمدها Q ، K .

(ب) إذا وجدت ثلاثة طرق من Q إلى S وطريقان من Q إلى V وأربعة طرق من Q إلى E ، وطريق واحد من K إلى S وطريق واحد من K إلى V وأربعة طرق من K إلى E . فعبّر عن هذه المعلومات بمصفوفة صفاها Q ، K وأعمدها S ، V ، E .

(جـ) اضرب المصفوفة المذكورة في (P) بالمصفوفة المذكورة في (ب) .

(د) ماهي المعلومات المعطاة بعناصر المصفوفة المذكورة في (جـ) ؟

٢ - ٧ استخدام المحددات من الدرجتين الثانية والثالثة في حل أنظمة المعادلات الخطية .

أولاً : استخدام محددات الدرجة الثانية :

إذا كانت $P = \begin{bmatrix} B & P \\ D & C \end{bmatrix}$ ، فقد رأينا في البند (٢ - ٥) أن المقدار $P = D - B$ حـ

يدعى محددة P ، ويرمز له بالرمز : $\begin{vmatrix} B & P \\ D & C \end{vmatrix}$ ، أي أن :

$$\text{محددة } P = \begin{vmatrix} B & P \\ D & C \end{vmatrix} = P - D - B$$

يقال إن $\begin{vmatrix} B & P \\ D & C \end{vmatrix}$ محددة من الدرجة الثانية وتتكون كما نرى من صفين وعمودين ،

حيث : عنصرا الصف الأول هما : P ، B .

عنصرا الصف الثاني هما : C ، D .

عنصرا العمود الأول هما : P ، C .

عنصرا العمود الثاني هما : B ، D .

والآن إذا كان لدينا نظام معادلتين أنيتين في مجهولين س ، ص

$$P \text{ س} + \text{ب ص} = \text{ل} \dots\dots\dots (١٢ - ٢)$$

$$\text{ح س} + \text{د ص} = \text{ك} \dots\dots\dots (١٣ - ٢)$$

فإننا ندعو الأعداد P ، ب ، ح ، د المعاملات . أما العددين ل و ك فيسميان الثوابت .

$$\text{نسمى} \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ل} \\ \text{د} & \text{ك} \end{vmatrix} \text{ محددة المعاملات ويرمز لها بالرمز } \Delta$$

لاحظ أن معاملي المجهول س يكونان العمود الأول للمحددة Δ وأن معاملي المجهول ص يكونان العمود الثاني للمحددة Δ

$$\text{نسمى} \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ل} \\ \text{د} & \text{ك} \end{vmatrix} \text{ محددة المجهول س ونرمز لها بالرمز } \Delta \text{ س ونحصل عليها من } \Delta \text{ بأن}$$

نضع الثابتين ل ، ك في العمود الأول بدلاً من معاملي س (P ، ح) .

$$\text{كما نسمى} \begin{vmatrix} \text{ل} & \text{ب} \\ \text{ك} & \text{د} \end{vmatrix} \text{ محددة المجهول ص ونرمز لها بالرمز } \Delta \text{ ص ونحصل عليها من}$$

المحددة Δ بأن نضع الثابتين ل ، ك في العمود الثاني بدلاً من معاملي ص (ب ، د) .

والآن بفرض أن $\Delta \neq 0$. فإن قيمتي المجهولين س ، ص تتحددان كالآتي :

$$(١٤ - ٢) \dots\dots\dots \text{س} = \frac{\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ل} \\ \text{د} & \text{ك} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ل} \\ \text{د} & \text{ك} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta \text{ س}}{\Delta} = \text{س}$$

$$(١٥ - ٢) \dots\dots\dots \text{ص} = \frac{\begin{vmatrix} \text{ل} & \text{ب} \\ \text{ك} & \text{د} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ل} \\ \text{د} & \text{ك} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta} = \text{ص}$$

يمكنك التحقق من أن القيمتين في (١٤ - ٢) ، (١٥ - ٢) هما حل النظام الوارد في (١٢ - ٢) ،

(٢-١٣) بأن تتبع الأسلوب الذي تعلمته في صفوف سابقة ، فلو قمت بضرب طرفي المعادلة (٢-١٢) في د ، وطرفي المعادلة (٢-١٣) في (ب - د) ثم جمعت المعادلتين الناتجتين لحصلت على المعادلة : (٢-١١) (د - ب - س) = د - ل - ب ك (تحقق من ذلك)

$$\Leftrightarrow \frac{ل د - ب ك}{د - ب - س} = س \quad \text{، بشرط } د - ب - س \neq 0$$

$$\frac{\begin{array}{c|c} ل & د \\ \hline ب & ك \end{array}}{\begin{array}{c|c} د & ب \\ \hline ب & ك \end{array}} = \frac{\Delta س}{\Delta}$$

تدريب (٢-١١)

بيّن أن القيمة الواردة للمجهول ص في (٢-١٥) تكوّن مع قيمة س الواردة في (٢-١٤) حلاً لنظام المعادلتين (٢-١٢) ، (٢-١٣) .

ملحوظة (٢-٨)

من الضروري أن تدرك بأن الصيغتين في (٢-١٤) ، (٢-١٥) هما مجرد هيكل رياضي لكتابة قيمتي س ، ص اللتين نحصل عليهما من المعادلتين (٢-١٢) ، (٢-١٣) بطريقة الحذف المعتادة .

مثال (٢-٢٧) :

حل نظام المعادلتين الآتيتين باستخدام المحددات :

$$٣س + ٢ص = ٢- \quad ، \quad ٥س - ٤ص = ٦$$

الحل :

باستخدام الصيغتين الواردتين في (٢-١٤) ، (٢-١٥) نجد أن :

$$س = \frac{\begin{array}{c|c} ٢- & ٢- \\ \hline ٤- & ٦ \end{array}}{\begin{array}{c|c} ٢ & ٣ \\ \hline ٤- & ٥ \end{array}} = \frac{\Delta س}{\Delta} = \frac{٢}{١١}$$

$$ص = \frac{\begin{array}{c|c} ٢- & ٣ \\ \hline ٦ & ٥ \end{array}}{\begin{array}{c|c} ٢- & ٢- \\ \hline ٤- & ٥ \end{array}} = \frac{\Delta ص}{\Delta} = \frac{٢٨}{١١}$$

مثال (٢٨ ٢) :

حل نظام المعادلتين :

$$\bullet = ١١ \text{ س} - ٧ \text{ ص} \quad , \quad \bullet = ٢ \text{ س} - \text{ص}$$

الحل :

$$\bullet = \frac{\begin{vmatrix} ٧- & : \\ ١- & : \end{vmatrix}}{٣} = \frac{\begin{vmatrix} ٧- & ١١ \\ ١- & ٢ \end{vmatrix}}{٣} = \text{س}$$
$$\bullet = \frac{\begin{vmatrix} : & ١١ \\ : & ٢ \end{vmatrix}}{٣} = \text{ص}$$

مثال (٢٩ ٢) :

حل نظام المعادلتين : $٣\text{م} - ٤ = ٣\text{ن} - ٤$ ، $٦\text{م} + \text{ن} + ٤ = \bullet$

الحل :

إن المجهولين هما م ، ن ، نضع المعادلتين بالشكل :

$$٣\text{م} - ٣\text{ن} = ٤ - ٤ \quad , \quad ٦\text{م} + \text{ن} = \bullet - ٤$$

ثم نوجد قيمتي م ، ن كما يلي :-

$$\frac{٨-}{٢١} = \frac{\begin{vmatrix} ٣- & ٤ \\ ١ & ٤- \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ٣- & ٣ \\ ١ & ٦ \end{vmatrix}} = \frac{\Delta \text{ م}}{\Delta} = \text{م}$$
$$\frac{١٢}{٧} - = \frac{٣٦-}{٢١} = \frac{\begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ ٤- & ٦ \end{vmatrix}}{٢١} = \frac{\Delta \text{ ن}}{\Delta} = \text{ن}$$

ثانياً : استخدام محددات الدرجة الثالثة :

$$\text{إذا كانت } \underline{P} = \begin{vmatrix} \underline{ح} & \underline{ب} & \underline{P} \\ \underline{ح} & \underline{ب} & \underline{P} \\ \underline{ح} & \underline{ب} & \underline{P} \end{vmatrix} \text{ فإن :}$$

محددة المصفوفة \underline{P} تعرّف بعدة طرق نختار منها الطريقة التالية :

$$\Delta = \underline{P}$$

$$= \begin{vmatrix} \underline{ح} & \underline{ب} & \underline{P} \\ \underline{ح} & \underline{ب} & \underline{P} \\ \underline{ح} & \underline{ب} & \underline{P} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{ح} & \underline{ب} & \underline{P} \\ \underline{ح} & \underline{ب} & \underline{P} \\ \underline{ح} & \underline{ب} & \underline{P} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \underline{ح} & \underline{ب} & \underline{P} \\ \underline{ح} & \underline{ب} & \underline{P} \\ \underline{ح} & \underline{ب} & \underline{P} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{ح} & \underline{ب} & \underline{P} \\ \underline{ح} & \underline{ب} & \underline{P} \\ \underline{ح} & \underline{ب} & \underline{P} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \underline{ح} & \underline{ب} & \underline{P} \\ \underline{ح} & \underline{ب} & \underline{P} \\ \underline{ح} & \underline{ب} & \underline{P} \end{vmatrix} - (2-16)$$

والطرف الأيسر يحوي ثلاث محددات من الدرجة الثانية نحصل عليها كما يلي :-

$$\text{نحصل عليها من } \Delta \text{ بعد حذف الصف والعمود المتقاطعين في } \underline{P} \begin{vmatrix} \underline{ح} & \underline{ب} \\ \underline{ح} & \underline{ب} \end{vmatrix}$$

$$\text{نحصل عليها من } \Delta \text{ بعد حذف الصف والعمود المتقاطعين في } \underline{ب} \begin{vmatrix} \underline{ح} & \underline{P} \\ \underline{ح} & \underline{P} \end{vmatrix}$$

$$\text{نحصل عليها من } \Delta \text{ بعد حذف الصف والعمود المتقاطعين في } \underline{ح} \begin{vmatrix} \underline{ب} & \underline{P} \\ \underline{ب} & \underline{P} \end{vmatrix}$$

$$\text{تسمى } \Delta = \begin{vmatrix} \underline{ح} & \underline{ب} & \underline{P} \\ \underline{ح} & \underline{ب} & \underline{P} \\ \underline{ح} & \underline{ب} & \underline{P} \end{vmatrix} \text{ محددة من الدرجة الثالثة وتتكون من ثلاثة صفوف وثلاثة}$$

أعمدة كما هو واضح .

مثال (٢-٣٠) :

$$\text{إذا كانت } \underline{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ فجد محددة } \underline{P}$$

الحل : محدة $\Delta = P$ =

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ \cdot & 1- \end{vmatrix} \times \cdot + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1- \end{vmatrix} 2- \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \cdot \end{vmatrix} 1 = \begin{vmatrix} \cdot & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1- \end{vmatrix}$$

$$\cdot + 9 \times 2 - 2 \times 1 =$$

$$16 - =$$

مثال (٣١-٢) :

جد محدتي المصفوفتين :

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdot & 4 \\ 5 & : & 2 \\ 2 & \cdot & 7- \end{bmatrix} = \underline{\underline{ب}} , \quad \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 11 & 7 & 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{P}}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} 0 + \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} 2- \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 11 & 7 \end{vmatrix} 1 = \Delta = P$$

$$1 \times 0 + (4-) \times 2 - 13- =$$

$$0 + 8 + 13- =$$

$$\begin{vmatrix} \cdot & 2 \\ \cdot & 7- \end{vmatrix} \times 1 + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7- \end{vmatrix} \times \cdot - \begin{vmatrix} 5 & : \\ 2 & \cdot \end{vmatrix} 4 = \Delta = \underline{\underline{ب}}$$

$$\cdot \times 1 + 29 \times \cdot - \cdot \times 4 =$$

$$= \text{صفرأ}$$

حل أنظمة معادلات الدرجة الأولى في ثلاثة مجاهيل

إذا كان لدينا نظام المعادلات التالي في ثلاثة مجاهيل س ، ص ، ع :

$$P \quad س + ب ص + ح ع = هـ_1 \quad (2 - 16)$$

$$P \quad س + بَ ص + حَ ع = هـ_2 \quad (2 - 17)$$

$$P \quad س + بُ ص + حُ ع = هـ_3 \quad (2 - 18)$$

فإنه بطريقة مشابهة لما فعلنا في حالة النظام الحاوي على معادلتين بمجهولين ، نجعل :

$$\text{محددة المعاملات} \quad \begin{vmatrix} ح & ب & P \\ حَ & بَ & P \\ حُ & بُ & P \end{vmatrix} = \Delta$$

$$\text{محددة المجهول س} \quad \begin{vmatrix} ح & ب & هـ_1 \\ حَ & بَ & هـ_2 \\ حُ & بُ & هـ_3 \end{vmatrix} = \Delta_S$$

ونحصل عليها من Δ بأن نضع الثوابت ($هـ_1$ ، $هـ_2$ ، $هـ_3$) في العمود الأول بدلاً من

معاملات س (P ، P ، P) .

$$\text{محددة المجهول ص} \quad \begin{vmatrix} ح & هـ_1 & P \\ حَ & هـ_2 & P \\ حُ & هـ_3 & P \end{vmatrix} = \Delta_V$$

($هـ_1$ ، $هـ_2$ ، $هـ_3$) في العمود الثاني بدلاً من معاملات ص (ب ، بَ ، بُ)

$$\text{محددة المجهول ع} \quad \begin{vmatrix} هـ_1 & ب & P \\ هـ_2 & بَ & P \\ هـ_3 & بُ & P \end{vmatrix} = \Delta_C$$

($هـ_1$ ، $هـ_2$ ، $هـ_3$) في العمود الثالث بدلاً من معاملات ع : (ح ، حَ ، حُ)

وبفرض $\Delta \neq 0$ ، نحصل على مجموعة الحل للنظام ($2 - 16$) ، ($2 - 17$) ،

(١٨ - ٢) فنجد أن :

$$\frac{\Delta}{\Delta} = ع ، \frac{\Delta}{\Delta} = ص ، \frac{\Delta}{\Delta} = س$$

مثال (٣٢ - ٢) :

أوجد مجموعة الحل لنظام المعادلات الآتية :

$$(١٩ - ٢)$$

$$س + ٣ ص - ع = ١$$

$$(٢٠ - ٢)$$

$$٠ = ع + ٢ ص + س$$

$$(٢١ - ٢)$$

$$١ - = ع + ٢ ص + س$$

سنستخدم طريقتين للحل ، الأولى بواسطة المحددات والأخرى بطريقة الحذف .

(١) الحل بواسطة المحددات

$$\begin{vmatrix} ١- & ٣ & ١ \\ ١ & ٢ & ٢ \\ ٢ & ١ & ٣ \end{vmatrix} = \Delta = \text{محددة المعاملات}$$

$$\Delta = (٦ - ٢) \times (١-) + (٣-٤) \times ٢ - (١-٤) \times ١ =$$

$$\begin{vmatrix} ١- & ٣ & ١ \\ ١ & ٢ & ٠ \\ ٢ & ١ & ١- \end{vmatrix} = \Delta_{س} = \text{محددة المجهول س}$$

$$\Delta_{س} = (٢ + ٠) (١-) + (١ + ٠) \times ٢ - (١-٤) \times ١ =$$

$$\begin{vmatrix} ١- & ١ & ١ \\ ١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ١- & ٣ \end{vmatrix} = \Delta_{ص} = \text{محددة المجهول ص}$$

$$\Delta_{ص} = (٠ - ٢-) \times (١-) + (٣-٤) \times (١) - (١) \times ١ =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \Delta = \text{محددة المجهول ع}$$

$$\Delta = (1-2) \times 1 + (2-) \times 3 - (2-) \times 1 =$$

$$\frac{1}{2} - = \frac{2-}{4} = \frac{\Delta \text{س}}{\Delta} = \text{س : إذن}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta} = \text{ص}$$

$$0 = \frac{-}{4} = \frac{\Delta \text{ع}}{\Delta} = \text{ع}$$

(٢) الحل بطريقة الحذف :

$$(19 - 2)$$

$$1 = \text{ع} - \text{ص} + 3$$

$$(20 - 2)$$

$$0 = \text{ع} + 2\text{ص} + 2\text{س}$$

$$(21 - 2)$$

$$1- = \text{ع} + 2\text{ص} + 3\text{س}$$

بضرب المعادلة (١٩ - ٢) في (٢ -) وجمعها مع المعادلة (٢٠ - ٢) ثم ضرب

المعادلة (١٩ - ٢) في (٣ -) وجمعها مع المعادلة (٢١ - ٢) ، نحصل على المعادلتين :

$$(22 - 2)$$

$$2- = \text{ع} + 3\text{ص} - 2$$

$$(23 - 2)$$

$$4- = \text{ع} + 5\text{ص} - 4$$

بضرب المعادلة (٢٢ - ٢) في (٢ -) وجمعها مع المعادلة (٢٣ - ٢) فنحصل على :

$$0 = \text{ع} \quad 0 = \text{ع} - \text{أي}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2-}{4-} = \text{ص} \text{ نحصل على في (٢٢ - ٢)}$$

$$\text{وبالتعويض في (١٩ - ٢) بالقيمتين : ص} = \frac{1}{2}, \text{ ع} = 0 \text{ نحصل على :}$$

$$س = 1 - 3 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

وهكذا نكون قد حصلنا على مجموعة الحل نفسها التي حصلنا عليها بالحل بواسطة المحددات .

ملحوظة (٢ - ٩)

إن طريقة حل نظام ثلاث معادلات خطية باستخدام المحددات ماهي إلا أسلوب تنظيمي لطريقة الحذف كما نوهنا إلى ذلك في حالة نظام معادلتين .

مثال (٢ - ٣٣) :

حل نظام المعادلات التالية :

$$٢ س - ص + ٣ ع = ١$$

$$٣ س + ٢ ص = ٢$$

$$- س + ع = ٣$$

الحل :

$$١٣ = \begin{vmatrix} ٣ & ١- & ٢ \\ ٠ & ٢ & ٢ \\ ١ & ٠ & ١- \end{vmatrix} = \Delta$$

$$١٤ - = \begin{vmatrix} ٣ & ١- & ١ \\ ٠ & ٢ & ٢ \\ ١ & ٠ & ٣ \end{vmatrix} = \Delta س$$

$$٣٤ = \begin{vmatrix} ٣ & ١ & ٢ \\ ٠ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٣ & ١- \end{vmatrix} = \Delta ص$$

$$٢٥ = \begin{vmatrix} ١ & ١- & ٢ \\ ٢ & ٢ & ٣ \\ ٣ & ٠ & ١- \end{vmatrix} = \Delta ع$$

مما تقدم نجد أن

$$س = -\frac{١٤}{١٣} ، ص = \frac{٣٤}{١٣} ، ع = \frac{٢٥}{١٣}$$

مثال (٢ - ٣٤) :

حل نظام المعادلات الآتية .

$$س - ٢ ص = ٥ + ع$$

$$ص - ٢ = س + ع + ١$$

$$ع = س - ص - ١$$

الحل :

نكتب نظام المعادلات بالصورة التالية :

$$س - ٢ ص - ٥ = ع$$

$$١ = ع - ص + ٢ س$$

$$١ - = ع + ص + س -$$

$$٦ - = \begin{vmatrix} ٥- & ٢- & ٢ \\ ١- & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١- \end{vmatrix} = \Delta س , \quad ١١ - = \begin{vmatrix} ٥- & ٢- & ١ \\ ١- & ١ & ٢ \\ ١ & ١ & ١- \end{vmatrix} = \Delta$$

$$٢ = \begin{vmatrix} ٢ & ٢- & ١ \\ ١ & ١ & ٢ \\ ١- & ١ & ١- \end{vmatrix} = \Delta ع , \quad ٣ = \begin{vmatrix} ٥- & ٢ & ١ \\ ١- & ١ & ٢ \\ ١ & ١- & ١- \end{vmatrix} = \Delta ص$$

$$\text{إذن : } س = \frac{٦-}{١١} , \quad ص = \frac{٣-}{١١} , \quad ع = \frac{٢-}{١١}$$

مثال (٢ - ٣٥) :

$$\begin{vmatrix} ح & ب & پ \\ ح & ب & پ \\ ح & ب & پ \end{vmatrix} \quad \text{أثبت أن قيمة المحددة}$$

تساوي صفراً إذا كانت عناصر أحد أعمدها كلها أصفاراً .

الحل :

توجد ثلاث حالات هي :

(١) عناصر العمود الأول كلها أصفار

(٢) عناصر العمود الثاني كلها أصفار

(٣) عناصر العمود الثالث كلها أصفار

نبرهن إحدى الحالات ولتكن (١) ونترك للطالب إثبات الحالتين الباقيتين في التمرين (١٠) من التمارين العامة .

(١) عناصر العمود الأول كلها أصفار بمعنى أن : $\cdot = \overset{\cdot}{P} = \overset{\cdot}{P} = P$

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \cdot - \begin{bmatrix} \cdot & \overset{\cdot}{P} \\ \cdot & \overset{\cdot}{P} \\ \cdot & \overset{\cdot}{P} \end{bmatrix} \times \cdot = \begin{bmatrix} \cdot & \overset{\cdot}{P} & \cdot \\ \cdot & \overset{\cdot}{P} & \cdot \\ \cdot & \overset{\cdot}{P} & \cdot \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \cdot + \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \cdot$$

$$= \text{صفراً} - \text{صفراً} + \text{صفراً} = \text{صفراً}$$

وهو المطلوب .

مثال (٢ - ٣٦) :

استفد من المثال السابق في حل النظام الآتي :

$$\cdot = 2س + 3ص - ع$$

$$\cdot = 2ص + ع$$

$$\cdot = 5س + \frac{3}{4}ص + \frac{1}{2}ع$$

الحل :

$$\frac{3}{4} \cdot = \begin{vmatrix} 1- & 2 & 2 \\ 1 & 2- & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 5 \end{vmatrix} = \Delta$$

ولما كانت عناصر العمود الأول من Δ س أصفارةً فإن $\Delta \cdot = 0$ ،
ولما كانت عناصر العمود الثاني من Δ ص أصفارةً فإن $\Delta \cdot = 0$ ،
ولما كانت عناصر العمود الثالث من Δ ع أصفارةً فإن $\Delta \cdot = 0$ ،
مما تقدم نجد أن : $0 = ع = ص = س$

يمكن أن نستنتج من المثال (٢ - ٣٦) أن أي نظام معادلات من الدرجة الأولى في ثلاثة مجاهيل تكون قيم مجاهيله (حلوله) أصفارةً بشرط أن تكون :

$$(١) \text{ محددة معاملاته } \Delta \neq \text{ صفرًا}$$

$$(٢) \text{ الثوابت كلها أصفار .}$$

ومن السهل على الطالب أن يعي أن هذه الحقيقة تسري بالنسبة لأنظمة المعادلات الخطية ذات المجهولين أيضاً . نختم هذا البند بالمثال الآتي :

مثال (٢ - ٣٧) :

أوجد قيم ه التي تجعل لنظام المعادلات الآتية حلاً :

$$س + ه = ص = ٤$$

$$٢ س - ص = ٠$$

الحل :

يكون لهذا النظام حل عندما تكون محددة معاملاته $\Delta \neq$ صفرًا . أي عندما :

$$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & -١ \end{vmatrix} \neq ٠ \iff ١ - ٢ \neq ٠$$

$$\iff ١ \neq \frac{١}{٢}$$

ولعلك تلاحظ أنه :

في حالة هـ $-- = \frac{1}{4}$ نحصل على :

$$(24 - 2)$$

$$س - \frac{1}{4} ص = 4$$

$$(25 - 2)$$

$$2س - ص = 0$$

بضرب المعادلة الأولى في (2) نحصل على :

$$(26 - 2)$$

$$2س - ص = 8$$

فلو فرضنا وجود حل مثل $س = س$ ، $ص = ص$ فإن هذا يقودنا إلى تناقض لأنه حسب

وحسب (26 - 2) :

$$2س - ص = 0$$

$2س - ص = 8$ أي أن $8 = 0$ وهذا مستحيل . إذن لا يوجد حل عندما

هـ $-- = \frac{1}{4}$ ومجموعة قيم هـ التي تجعل للنظام المعطى حلاً هي : $ح - \left\{ \frac{1}{4} \right\}$.

تمارين (2-6)

(1) أحسب قيم المحددات الآتية :

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \quad (أ) \quad \begin{vmatrix} 13 & 7- \\ 7- & 13 \end{vmatrix} \quad (ب) \quad \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 6 & . \end{vmatrix} \quad (ج)$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \\ 8 & 6 & 4 \end{vmatrix} \quad (د) \quad \begin{vmatrix} 6 & . & 3 \\ 7 & . & 4 \\ 8 & . & 0 \end{vmatrix} \quad (هـ) \quad \begin{vmatrix} 6 & 1- & 2 \\ 1 & . & 1 \\ 1 & . & 0 \end{vmatrix} \quad (و)$$

(٢) أوجد حل كلٍّ من الأنظمة الآتية باستخدام المحددات :

$$(أ) \quad \begin{cases} ٠ = س + ٢ ص \\ ١ = س + ٣ ص \end{cases}$$

$$(ب) \quad \begin{cases} ١ = ٣ - س - ٥ ص \\ ٣ = س + ٦ ص \end{cases}$$

$$(ج) \quad \begin{cases} ٤ + س = ٢ س \\ ٠ = ٧ ك - ٦ ل \end{cases}$$

$$(د) \quad \begin{cases} ٠ = ٤ ل + ٣ ك \\ ١ = ٤ - س \end{cases}$$

(٣) استخدم المصفوفات لحل أنظمة المعادلات في التمرين (٢) .

(٤) حل نظام المعادلات بثلاث طرائق وحقق النتائج :

$$\begin{cases} ١ = ٣ - س \\ ٢ = ٢ س - ص \end{cases}$$

(٥) أوجد قيم هـ التي تجعل لنظام المعادلات الآتي حلاً .

$$\begin{cases} ١ = ٢ + ص \\ ٤ = ٣ س + هـ ص \end{cases}$$

(٦) استخدم المحددات وطريقة الحذف في حل أنظمة المعادلات الآتية :

$$١ = س + ص + ع$$

$$(أ) \quad ١ = ٢ س - ص - ع$$

$$٢ = ٣ س + ٢ ص$$

$$٠ = -س + ٢ ص + ل$$

$$(ب) \quad ١ = ٣ س - ٢ ص - ل$$

$$٠ = س + ٢ ص + ل$$

$$٣ س = ٢ ص + ٣ + ع$$

$$(ج) \quad ٢ س = ص + ٤ + ع$$

$$ص + ع = -س + ٣$$

$$١ = س - \frac{٢}{٣} ص + \frac{٣}{٤} ع$$

$$(د) \quad ٢ = ٣ س + ص - ع$$

$$٠ = ٦ س - ص + ٢ ع$$

(٧) أوجد قيم ه التي تجعل لنظام المعادلات الآتية حلاً :

$$٠ = س - ص + ع$$

$$٠ = س + ص + ه - ع$$

$$١ = س - ص + ع$$

(٨) أثبت أن المبادلة بين صفّي محدّدة من الدرجة الثانية أو بين عموديهما يغير إشارتها فقط .

أي أن :

$$\begin{vmatrix} P & ب \\ ح & د \end{vmatrix} - = \begin{vmatrix} ب & P \\ د & ح \end{vmatrix} \text{ وأن } \begin{vmatrix} د & ح \\ ب & P \end{vmatrix} - = \begin{vmatrix} ب & ح \\ د & P \end{vmatrix}$$

(٩) أثبت أن المبادلة بين أي صفين في محدّدة من الدرجة الثالثة يغير إشارتها فقط . أي أن :

$$\begin{vmatrix} \tilde{P} & \overset{\sim}{ب} & \overset{\sim}{ح} \\ \tilde{P} & \overset{\sim}{ب} & \overset{\sim}{ح} \\ \tilde{P} & \overset{\sim}{ب} & \overset{\sim}{ح} \end{vmatrix} - = \begin{vmatrix} \tilde{P} & \overset{\sim}{ب} & \overset{\sim}{ح} \\ \tilde{P} & \overset{\sim}{ب} & \overset{\sim}{ح} \\ \tilde{P} & \overset{\sim}{ب} & \overset{\sim}{ح} \end{vmatrix}$$

وكذلك المبادلة بين الصفين الأول والثالث والمبادلة بين الصفين الثاني والثالث .

(١٠) أثبت أن المبادلة بين أي عمودين في محدّدة من الدرجة الثالثة يغير إشارتها فقط .

تمارين عامة

(١) حل المعادلة التالية وحقّق الناتج :

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - \underline{\text{س}} \right)^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \underline{\text{س}}^2$$

(٢) أوجد النظير الجمعي ، ثم الضربي إن أمكن لكل مصفوفة فيما يأتي :

$$(P) \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} , (B) \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} , (C) \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} , (D) \begin{bmatrix} 1- & 2- \\ 2- & 4- \end{bmatrix}$$

(٣) عبّر عما يأتي بمصفوفة واحدة :

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1- & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{ص} & \text{س} \end{bmatrix}$$

$$(٤) \text{ برهن أن المصفوفة } \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ تحقق المعادلة } \underline{\text{س}}^2 - \underline{\text{س}} - 4 = \underline{\text{ص}}$$

$$(٥) \text{ إذا علمت أن } \underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} 2 & 1- \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ فالمطلوب :}$$

$$(P) \text{ إثبات أن } \underline{\text{س}}^2 - 2\underline{\text{س}} = \underline{\text{ص}}$$

(B) إستعمل النتيجة (P) لإيجاد $\underline{\text{س}}^{-1}$

(إرشاد : حلل الطرف الأيمن للمعادلة المعطاة)

$$(٦) \text{ إذا كانت } P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ فإن المعادلة المصفوفية .}$$

$$\underline{\text{ص}} = \underline{\text{س}} + P + \underline{\text{س}}^2 \text{ تكافئ مجموعة من أربع معادلات في مجهولين } \underline{\text{س}} , \underline{\text{ص}}$$

والمطلوب : (P) أوجد $\underline{\text{س}}^{-1}$ ثم اكتب المعادلات الأربع المشار إليها .

(B) حل المعادلات المذكورة في (P) بطريقتين مختلفتين .

(٧) حل أنظمة المعادلات الآتية باستخدام المصفوفات :

$$(P) \quad \begin{cases} 8 = 2ص + س \\ 14 = 4ص + 2س \end{cases} ,$$

$$(ب) \quad \begin{cases} 0 = 4ص + 5س \\ 0 = 12ص - 3س \end{cases} ,$$

(٨) إذا كانت $\underline{ص}$ ، $\underline{س}$ مصفوفتين من النوع 2×2 فأثبت أن :

$$\text{محددة } \underline{ص} \times \text{محددة } \underline{س} = \text{محددة } (\underline{ص} \cdot \underline{س})$$

ملحوظة : العلاقة أعلاه صحيحة بصورة عامة لجميع المصفوفات المربعة $n \times n$ ولكن نكتفي بأن

$$\text{يبرهنها الطالب في الحالة } n = 2$$

(٩) حل أنظمة المعادلات الآتية باستخدام المحددات :

$$(P) \quad \begin{cases} 0 = \frac{1}{4}ج + \frac{1}{3}ع + س \\ 0 = 4ج - ع - 2س \\ 1 = ج + ع + 3س \end{cases}$$

$$(ب) \quad \begin{cases} 1 = \frac{5}{6}ع + \frac{2}{3}ص - \frac{1}{3}س \\ 0 = \frac{3}{4}س + ص - ع \\ 0 = س + \frac{3}{5}ع \end{cases}$$

$$(ج) \quad \begin{cases} 0 = 12ص + 16س - ع \\ 1 = 12ع + 14ص + س \\ 0 = 11س + ص + 15ع \end{cases}$$

$$(د) \quad \begin{cases} 0 = 12ص + 16س - ع \\ 1 = 12ع + 14ص + س \\ 0 = 11س + ص + 15ع \end{cases}$$

$$(هـ) \quad \begin{cases} 0 = 12ص + 16س - ع \\ 1 = 12ع + 14ص + س \\ 0 = 11س + ص + 15ع \end{cases}$$

$$(و) \quad \begin{cases} 0 = 12ص + 16س - ع \\ 1 = 12ع + 14ص + س \\ 0 = 11س + ص + 15ع \end{cases}$$

$$(ز) \quad \begin{cases} 0 = 12ص + 16س - ع \\ 1 = 12ع + 14ص + س \\ 0 = 11س + ص + 15ع \end{cases}$$

$$(ح) \quad \begin{cases} 0 = 12ص + 16س - ع \\ 1 = 12ع + 14ص + س \\ 0 = 11س + ص + 15ع \end{cases}$$

(١٠) أكمل بالتفصيل إثبات الحالات الباقية من المثال (٢ - ٣٥)

حساب المثلثات

- ١ - ٣ لحظة تاريخية .
- ٢ - ٣ مفاهيم أولية .
- ٣ - ٣ الدوال الدائرية .
- ٤ - ٣ تبسيط بعض قيم الدوال الدائرية .
- ٥ - ٣ التمثيل البياني لدالتى الجيب وجيب التمام .
- ٦ - ٣ الدوال المثلثية للزاوية وتطبيقات حساب المثلثات .
- ٧ - ٣ الدوال الدائرية لمجموع زاويتين أو الفرق بينهما .
- ٨ - ٣ الدوال الدائرية لمضاعفات الزوايا .
- ٩ - ٣ قوانين التحويل
- ١٠ - ٣ المعادلات المثلثية .
- ١١ - ٣ العلاقة بين قياسات زوايا المثلث وأطوال أضلاعه .

الباب الثالث - حساب المثلثات (٢)

٣ - المحة تاريخية :

إذا كنا بصدد دراسة علم المثلثات ، فإن مؤرخي الحضارة اعتبروه علماً عربياً ، ذلك أنه « لولا العرب المسلمون لما كان هذا العلم على ما هو عليه الآن ، فإليهم يرجع الفضل بتوفيق الله تعالى في وضعه بشكل علمي منظم » .

وإذا كان أسلافنا قد ورثوا ما توصل إليه اليونان والهنود من أوليات هذا العلم ، فإن اليونان والهنود إنما بحثوا ذلك في ثنايا علم الفلك . وكما أسلفنا في باب المثلثات الذي قدمناه لك في الصف الأول ، فإن العرب المسلمين هم الذين نظموا المعارف المتعلقة بهذا العلم ، ثم جعلوا منها علماً مستقلاً عن علم الفلك ، وأسموه علم الأنساب ، لأنه يقوم على الأوجه المختلفة الناشئة بين أضلاع المثلث . وقد استنبط العرب المسلمون الظل (أي قياس الزاوية المفروضة بالضلع المقابل لها مقسوماً على الضلع المجاور) كما استنبطوا ظل التمام .

إن حشداً كبيراً من علمائنا المسلمين كان لهم دور في تقدم هذا العلم وازدهاره ، ذكرنا لك منهم أبا عبد الله محمد بن جابر البتاني (٢٣٥ - ٣١٧هـ) وهو أول من وضع جداول ظل التمام ، وأبا الوفاء محمد بن اسماعيل البوزجاني (٣٢٨ - ٣٨٨هـ) الذي أوجد طريقة جديدة لحساب جداول الجيب ، وكان جيب الزاوية المساوية ٣٠ دقيقة (أي نصف درجة) محسوباً فيها حساباً صحيحاً إلى الرقم الثامن من الكسر العشري ، وكذلك فهو الذي عرّف الصلات في المثلثات مما نعبّر عنه اليوم بالرمز $(P \pm b)$ ، كما كشف عدداً من الصلات بين الجيب والظل والقاطع وتماثلاتها . والجدير بالذكر أن الغربيين ، بعد أن نُقلت إليهم حضارتنا وعلومنا نسبوا الكثير من اكتشافاتنا إلى علمائهم مخالفين بذلك الأمانة العلمية التي يدعونها ، فلقد اعترف المؤلف الكبير في تاريخ العلوم « فلورين كاجوري » في كتابه تاريخ الرياضيات « أن هناك أموراً كثيرة وبحوثاً عديدة

في علم حساب المثلثات ، كانت منسوبة إلى «ريجيو مونتانيوس» ، ثبت أنها من وضع العرب المسلمين ، وأنهم سبقوه إليها « كما أيده بذلك مؤرخون غربيون آخرون مثل « جورج سارتن ، وديفيد يوجين سمث » ، وغيرهم في « أن جميع مؤلفات هذا العالم اعتمدت على كتب العرب المسلمين ، وأنه نقل عنهم الكثير من البحوث ، خاصة فيما يتعلق بعلم حساب المثلثات » .

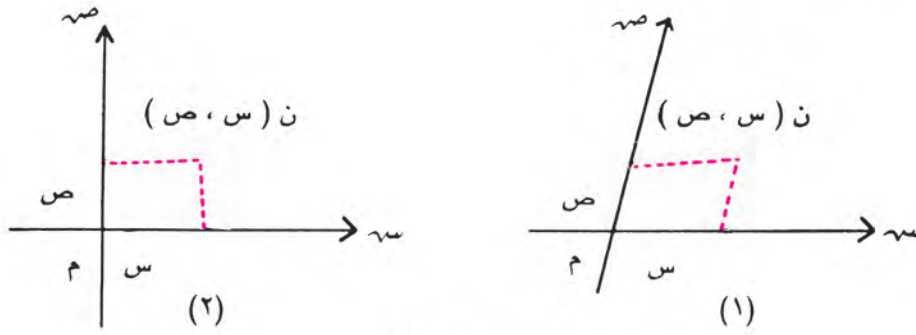
ويقول «جوزيف هل» ، في كتابه حضارة العرب : « إن علم الجيب والظل يعتبر من علوم المسلمين » وأضاف الدكتور «ستروك» في كتابه : المختصر في تاريخ الرياضيات : « إن كلمة جيب كلمة عربية ، وهذا لا يترك مجالاً للشك إلى أن الفضل يرجع إلى المسلمين ، في تطويرها إلى ماهي عليه الآن » .

٣ - ٢ مفاهيم أولية

نقدم فيما يلي بعض المفاهيم الضرورية لدراسة حساب المثلثات ، وإن جلّ هذه المفاهيم معلوم لدى الطالب فهي تقدم له على سبيل المراجعة .

(١) المستوي

سبق أن تعرفت على المستوي من خلال دراستك لكل من الهندسة والهندسة التحليلية ، وأقمت فيه محورين مدرجين بحيث يقابل كل نقطة فيه زوج مرتب من الأعداد الحقيقية (س ، ص) هما إحداثيا تلك النقطة ، وقد سمينا المستوي بعد إضفاء هذه الصفة عليه : المستوي الإحداثي (أو المستوي الديكارتي) كما في الشكل (٣ - ١)

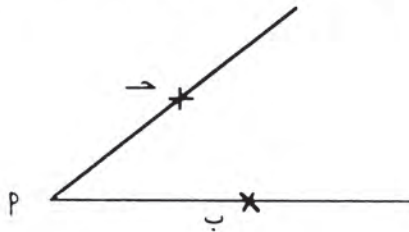


شكل (٣ - ١)

(٢) الزاوية

وقد تعرفت أيضاً على مفهوم القطاع الزاوي والزاوية ، ولعلك تذكر تساوي الزاويتين اللتين

يمثلهما القطاعان الزاويان :



شكل (٣ - ٢)

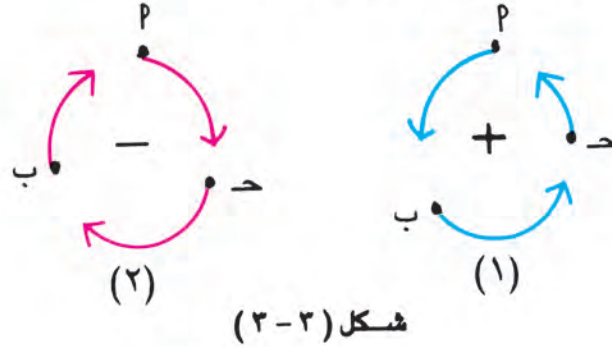
$$[\widehat{ب}, \widehat{ح}] , [\widehat{ح}, \widehat{ب}]$$

$$\widehat{ب} = \widehat{ح} . \text{ أي أن } \widehat{ب} = \widehat{ح}$$

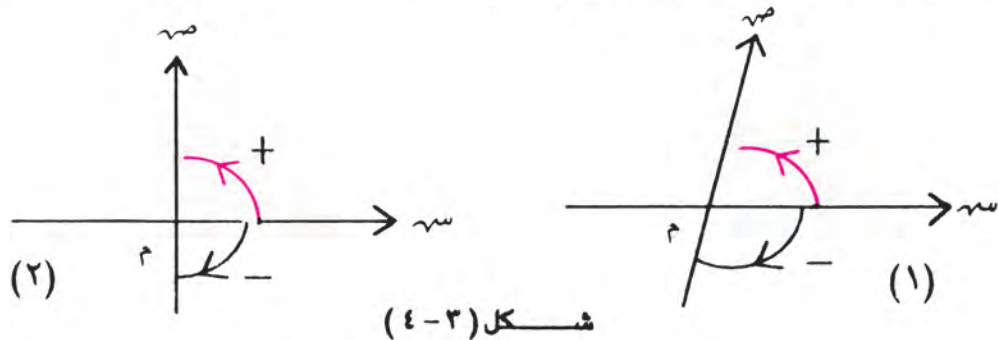
أنظر الشكل (٣ - ٢)

٣ - توجيه المستوى

لو اعتبرنا المستوي \triangle والنقاط P, B, C \exists ليست على استقامة واحدة ، ففي الشكل (٣-١) نجد أن الدورانات (P, B, C) ، (C, P, B) ، (B, C, P) لها الاتجاه نفسه ، إنه الاتجاه المخالف لدوران عقارب الساعة .



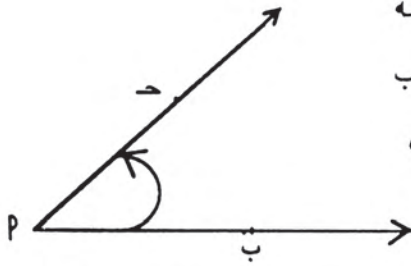
وفي الشكل (٣-٢) نجد أن الدورانات : (P, B, C) ، (C, P, B) ، (B, C, P) لها الاتجاه نفسه ، إنه الاتجاه الموافق لدوران عقارب الساعة . ومن الواضح أن الاتجاهين متضادان . وقد اصطلح على اعتبار الاتجاه الأول موجباً ، والاتجاه الثاني سالباً ولو كان المستوي \triangle مستوياً إحداثياً ، واعتبرنا عليه الاتجاهين أنفي الذكر ، لادعونه **مستوياً موجباً**



يمثل الشكل (٣-٤/١) نظام محاور إحداثية مائلة . كما يمثل الشكل (٣-٤/٢) نظام محاور إحداثية متعامدة . سنعتمد في دراستنا هذه على حالة مستوي إحداثي موجبه منسوب إلى نظام إحداثي متعامد .

تعريف (٣-١)

إذا رسمنا في مستوٍ موجّه نصفين مستقيمين $[P, B]$ ، $[P, C]$ يشتركان في مبدئهما P ، فإن الزوج المرتب $([P, B], [P, C])$ يسمى الزاوية الموجهة التي ضلعها الابتدائي $[P, B]$ ، وضلعها النهائي $[P, C]$ ورأسها النقطة P . وتكتب بإحدى الطريقتين .
 $([P, B], [P, C])$ أو $\langle [P, B] \leftarrow [P, C] \rangle$. انظر الشكل (٣-٥)



شكل (٣-٥)

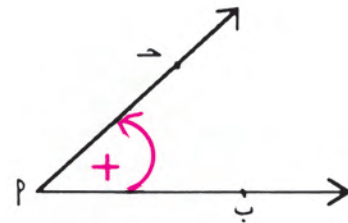
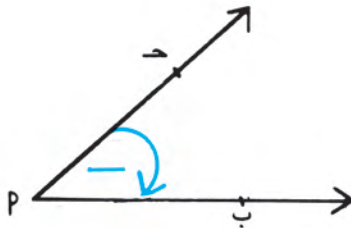
وبناءً على ما رأينا في توجيه المستوي ، فإن الزاوية الموجهة تكون موجبة إذا كان الضلع الابتدائي يدور بالاتجاه الموجب لينطبق على الضلع النهائي ، وتكون سالبة إذا كان الدوران المذكور بالاتجاه السالب . فإذا كان العدد الحقيقي h يعبر عن قياس الزاوية الموجهة $([P, B], [P, C])$ ،

فإننا نعبر عن ذلك بقولنا :

ق $([P, B], [P, C]) = h$ ونقرأ : قياس الزاوية الموجهة $([P, B], [P, C])$ يساوي h ويكون
 ق $([P, C], [P, B]) = -h$

نلخص ذلك بقولنا : $([P, B], [P, C]) = -([P, C], [P, B])$

أو : $\langle [P, B] \leftarrow [P, C] \rangle = - \langle [P, C] \leftarrow [P, B] \rangle$. (انظر الشكل (٣-٦))



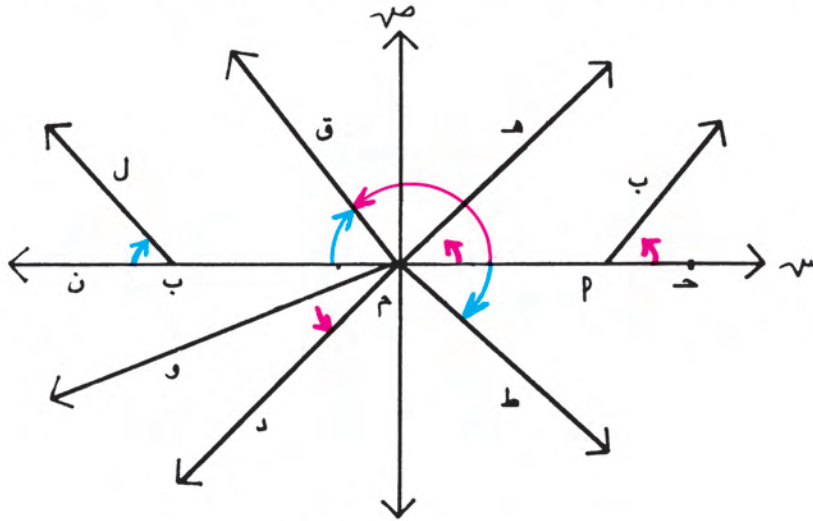
شكل (٣-٦)

تعريف (٢-٢)

إذا كان لدينا نظام إحداثي متعامد للمستوي \angle وزاوية موجهة في \angle ، فإنه يقال : إن الزاوية الموجهة في وضع قياسي إذا انطبق رأسها على نقطة الأصل وضلعها الابتدائي على الجزء الموجب لمحور السينات .

تدريب (١-٣)

في الشكل (٧ - ٣) الزاوية $\langle \text{ح م هـ} \rangle$ في وضع قياسي لانطبق رأسها على نقطة الأصل ولأن ضلعها الابتدائي [م ح منطبق على الجزء الموجب لمحور السينات وهي زاوية موجبة لأن ضلعها الابتدائي يدور بالاتجاه الموجب لينطبق على الضلع النهائي [م هـ بينما الزاوية $\langle \text{ح پ ب} \rangle$ ليست في وضع قياسي (رأسها لا ينطبق على نقطة الأصل) وهي أيضاً زاوية موجبة (لماذا ؟) .



شكل (٧-٣)

(١) ماذا تقول عن الزوايا الموجهة : $\langle \text{ح م ط} \rangle$ ، $\langle \text{و م د} \rangle$ ، $\langle \text{ن ب ل} \rangle$ ، $\langle \text{ن م ق} \rangle$ ، $\langle \text{ح م ق} \rangle$ ،

في الشكل (٧ - ٣) ، من حيث الوضع القياسي والاتجاه ؟

(٢) أكمل ما يلي :

$$\begin{aligned} > \overrightarrow{ب م ح} = [م ح] ، > \overrightarrow{ح ه د} = [ه ح] ، [ه د] \\ &= [ح ن] ، [ح ق] = > \overrightarrow{ح ب د} \\ &= [وس] ، [وص] = > \overrightarrow{ق م ه} \end{aligned}$$

ملحوظة (٣ - ١)

إذا كانت الزاوية الموجهة في وضع قياسي ، فإننا ننسبها إلى الربع الذي يقع فيه ضلعها النهائي . فلو وقع ضلعها النهائي في الربع الأول ، مثلاً ، قلنا إن الزاوية تقع في الربع الأول كالزاوية $> \overrightarrow{ب م ح}$ في الشكل (٣ - ٨) بينما تقع الزاوية $> \overrightarrow{ق م ح}$ في الربع الثالث (لماذا ؟)

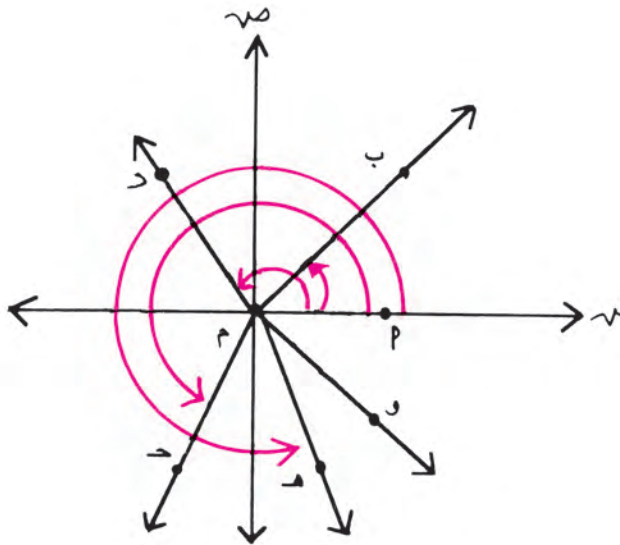
تدريب (٣ - ٢)

(١) في الشكل (٣ - ٨)

عين في أي ربع تقع كل من

الزوايا الآتية :

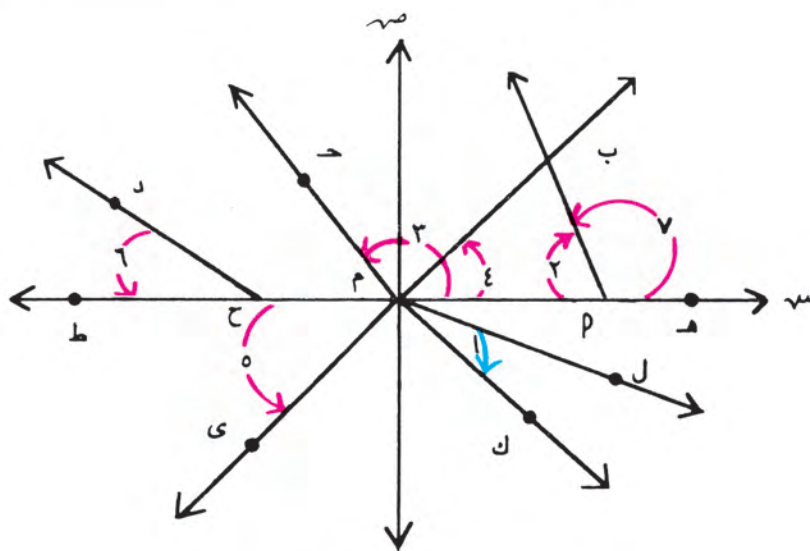
$$> \overrightarrow{ب م د} ، > \overrightarrow{ب م ه} ، > \overrightarrow{ب م و}$$



شكل (٣ - ٨)

(٢) أكمل الجدول التالي مستعيناً بالشكل (٩ - ٣) :

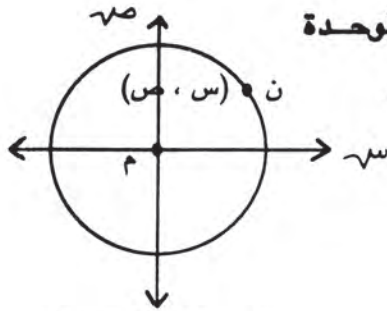
الرقم	كتابة الزاوية الموجهة		الاتجاه
	بالشكل الآخر	بشكل زوج مرتب	
١	$\overleftarrow{> \text{ل م ك}}$	$(\text{م ل} , \text{م ك})$	سالب
٢	$\overleftarrow{> \text{ب م}}$		
٣			الثاني
٤			
٥			
٦			
٧			



شكل (٩ - ٣)

(٥) دائرة الوحدة

إذا رسمنا في مستوٍ موجه منسوب إلى نظام إحداثي متعامد ، دائرةً مركزها نقطة الأصل ،



شكل (٢-١٠)

ونصف قطرها وحدة الطول ، فإن هذه الدائرة تسمى دائرة الوحدة

(أو الدائرة المثلثية) فإذا كانت ن (س ، ص) نقطة من هذه

$$\text{الدائرة فإن : } ١ = ٢ص + ٢س$$

انظر الشكل (٢ - ١٠)

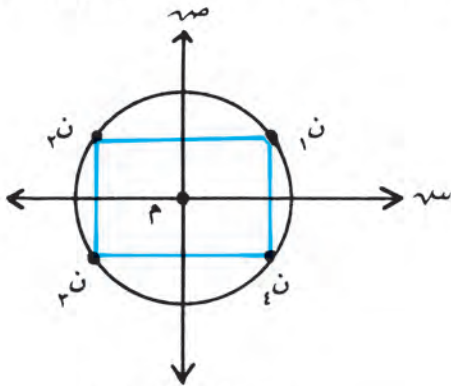
ملحوظة (٣ - ٢)

واضح أن محيط دائرة الوحدة = $٢ط$ وحدة طول (لماذا ؟) فإذا كانت وحدة الطول هي

السنتمتر ، فإن محيط دائرة الوحدة يساوي (٢ط) سم ، حيث ط (أو π) عدد حقيقي غير نسبي

$$\text{وقيمته التقريبية } ٣١٤ \text{ أو } \frac{٢٢}{٧} \text{ أو } \frac{٢٥٥}{١١٣}$$

(لاحظ أن القيم التقريبية للعدد ط هي أعداد نسبية وأن القيمة الأخيرة هي أقرب هذه القيم إلى ط)



شكل (٢-١١)

تدريب (٣ - ٣)

إذا كانت ن (س ، ص) \exists (د) دائرة الوحدة

شكل (٢ - ١١) فأوجد إحداثيي كلٍ من النقاط

ن١ (نظيرة ن١ بالنسبة للمحور الصادي)

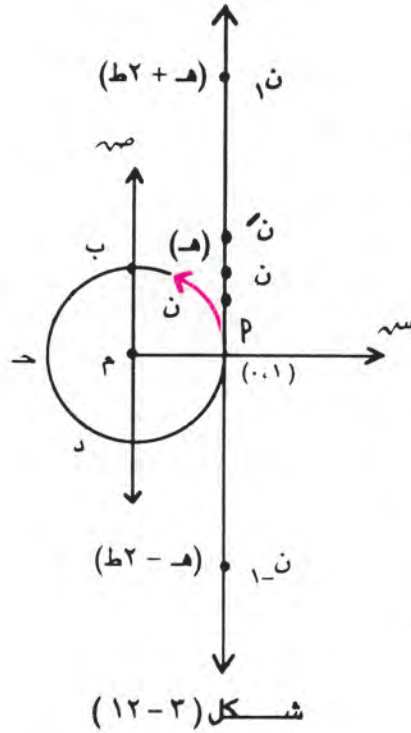
ن٢ (نظيرة ن٢ بالنسبة للمحور السيني)

ن٣ (نظيرة ن٣ بالنسبة للمحور السيني)

تحقق أن : ن١ ، ن٢ ، ن٣ ، ن٤ تنتمي إلى دائرة الوحدة (د) ، وأن ن٣ نظيرة ن١ بالنسبة لنقطة

الأصل م ، أوجد نظيرة ن٢ بالنسبة لـ م .

(١) قياس الزاوية الموجهة :



لوجعلنا خط الأعداد الحقيقية مماساً لدائرة الوحدة في النقطة $P(0,1)$ التي هي بالوقت ذاته نقطة الأصل لخط الأعداد كما في الشكل (٣ - ١٢) على أن تكون الأعداد الحقيقية الموجبة ممثلة بالنقاط الواقعة فوق محور السينات ، والسالبة ممثلة بالنقاط الواقعة تحته ، ولو اعتبرنا خط الأعداد مادياً مرناً ، بحيث يمكن لفه على الدائرة ، فإن كل نقطة من خط الأعداد لا بد من انطباقها على نقطة من الدائرة ، فالنقطة N مثلاً من خط الأعداد تنطبق على النقطة N من الدائرة ويكون :

$$\text{طول القوس } [PN] = \text{طول القطعة } [PN] ، \text{ وللسبب نفسه}$$

$$\text{فإن : طول } [PN] = \text{طول } [PN] - \frac{1}{\tau} = \frac{\tau}{\tau} = \text{وحدة طول}$$

وإذا كان طول $[N_1 N_2] = \tau$ وحدة طول فإن N_1 ستنتطبق أيضاً على N_2 أثناء عملية اللف . وعلى هذا فإن كل نقطة من خط الأعداد تقابلها نقطة على الدائرة ، بينما نجد أن كل نقطة من الدائرة يقابلها عدد لا نهائي من نقاط خط الأعداد ، بحيث تكون المسافة بين نقطتين متتاليتين منها مساوية τ (وحدة طول) . أو بتعبيرٍ آخر :

كل نقطة من الدائرة يقابلها على خط الأعداد الحقيقية مجموعة من الأعداد ، بحيث يكون الفرق بين كل عددين متتاليين مساوياً τ فعند لف الجزء الموجب من خط الأعداد ، إذا كانت N الممثلة للعدد الحقيقي h أول نقطة تنطبق على N ، فإن النقاط المنطبقة على N هي :

$$N_1 , N_2 , N_3 , \dots , N_m , \dots$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$h , h + \tau , h + 2\tau , h + 3\tau , \dots , h + m\tau , \dots$$

الممثلة للأعداد : $h , h + \tau , h + 2\tau , h + 3\tau , \dots , h + m\tau , \dots \in \mathbb{Z} \cup \{0\}$

وعند لف الجزء السالب من خط الأعداد نجد أن النقاط المنطبقة على ن هي :

$$\dots\dots\dots 1\text{-ن} , 2\text{-ن} , 3\text{-ن} , \dots\dots\dots \text{نم} \dots\dots\dots$$

المثلة للأعداد : ه - ٢ط ، ه - ٤ط ، ه - ٦ط ، ... ، ه + ٢م ط ، ... ، م \in $\bar{ص}$ \cup {٠}

وبالتالي فإن النقطة ن ستنتطبق عليها النقاط المثلة لعناصر المجموعة :

$$\{ \text{ه} + ٢م ط : م \in \bar{ص} \} . \text{ وهكذا } \dots\dots$$

نجد أن كل عدد حقيقي ستكون له صورة على دائرة الوحدة ، ونعبر عن ذلك بقولنا :

توجد دالة (يسميها البعض دالة اللف) مجالها مجموعة الأعداد الحقيقية ح ومجالها المقابل مجموعة نقاط دائرة الوحدة .

ففي الشكل (٣ - ١٢) النقطة P (١ ، ٠) هي صورة لكل من عناصر المجموعة :

$$\{ \text{ه} - ٤ط ، - ، \dots\dots ، ٢ط ، ٠ ، ٢ط ، ٤ط ، \dots\dots \} = \{ م ط : م \in \bar{ص} \}$$

والنقطة ب (٠ ، ١) هي صورة لكل من عناصر المجموعة :

$$\{ \dots\dots ، \frac{٧\text{ط}}{٢} ، \frac{٥\text{ط}}{٢} ، \frac{٣\text{ط}}{٢} ، \frac{١\text{ط}}{٢} ، \dots\dots \} = \{ م ط + \frac{٢}{٢} : م \in \bar{ص} \}$$

والنقطة ج (٠ ، -١) هي صورة لكل من عناصر المجموعة :

$$\{ \text{ط} + ٢م ط : م \in \bar{ص} \} \quad (\text{لماذا ؟})$$

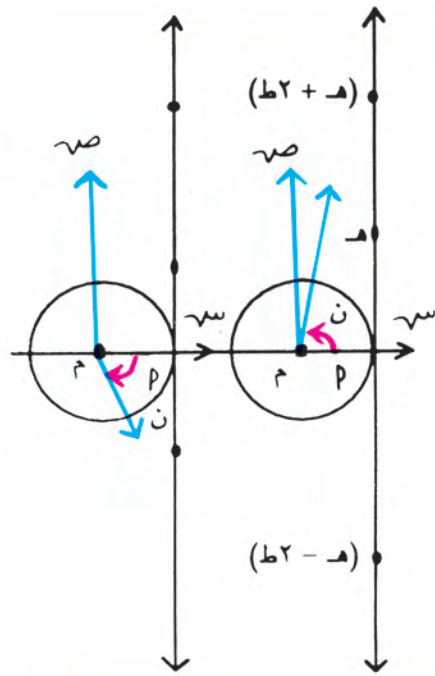
والنقطة د (١ ، ٠) هي صورة لكل من عناصر المجموعة :

$$\{ \text{م} ط + \frac{٢٢}{٢} : م \in \bar{ص} \} \quad (\text{لماذا ؟})$$

$$\text{أو : } \{ - \text{م} ط + \frac{٢}{٢} : م \in \bar{ص} \} \quad (\text{لماذا ؟})$$

وبصورة عامة :

إذا كانت $\text{م} > ٢$ من موجبة وبوضع قياسي (P ، ن تقعان على دائرة الوحدة) فإن أصغر عدد حقيقي



شكل (١٣-٢) شكل (١٤-٢)

موجب هـ صورته النقطة ن يساوي طول القوس [ن P]
المقابلة لتلك الزاوية ، ومن الواضح أن جميع الأعداد
الحقيقية (الموجبة والسالبة) التي صورتها النقطة ن
هي عناصر المجموعة :

$$\{ م \supseteq ص \} . \text{ انظر الشكل (١٣-٢)}$$

أما إذا كانت $\langle م P \rangle$ ن سالبة كما في الشكل (١٤-٢)

فإن أكبر عدد حقيقي سالب هـ صورته النقطة ن ،

تكون قيمته المطلقة | هـ | مساوية طول القوس [ن P]

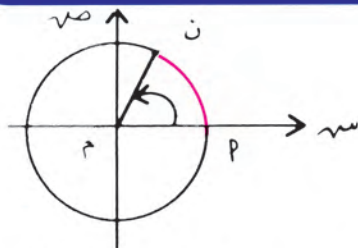
المقابلة لتلك الزاوية ، وكذلك نجد أن جميع الأعداد الحقيقية

التي صورتها النقطة ن ، هي عناصر المجموعة :

$$\{ م \supseteq ص \} .$$

تعريف (٢-٢)

يسمى العدد الحقيقي هـ + م ط (م \supseteq ص) القياس العام للزاوية الموجهة $\langle م P \rangle$ ،
حيث | هـ | هو العدد الدال على طول القوس من دائرة الوحدة الذي يقابل تلك الزاوية ،
ويسمى العدد الحقيقي هـ - [\supseteq] ط ، ط [القياس الرئيسي للزاوية الموجهة $\langle م P \rangle$]
بالتقدير الدائري .



شكل (١٥-٢)

ملحوظة (٣-٣)

يمثل الشكل (١٥-٢) الزاوية الموجهة $\langle م P \rangle$

التي قياسها = ١ بالتقدير الدائري .

فيكون طول القوس [ن P] = ١ (وحدة طول)

= طول نصف قطر دائرة الوحدة .

وحيث نقول :

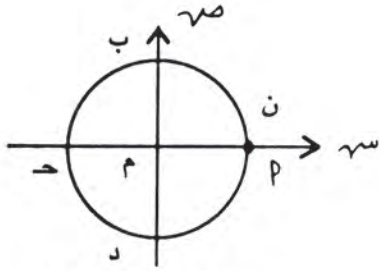
ق ($P > M$ ن) = $\widehat{1}$ زاوية نصف قطرية (أو : راديان)

وتقرأ : قياس ($P > M$ ن) = $\widehat{1}$ زاوية نصف قطرية (أو : راديان)

والزاوية نصف القطرية (أو الراديان) ، كما تعلم ، هي قياس زاوية مركزية تقابل قوساً من

دائرة ، طوله مساوٍ نصف قطر تلك الدائرة .

حالات خاصة



شكل (١٦ - ٢)

- لعلك لاحظت أنه عندما $P = N$ يكون طول $[\widehat{PN}] = 0$ ، شكل (١٦ - ٢) ويكون القياس الرئيسي للزاوية $P > M$ ن هو الصفر .

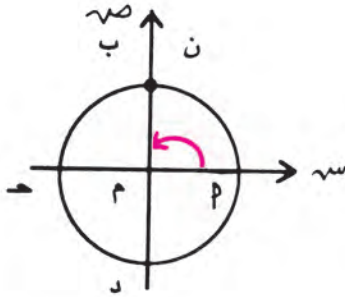
والقياس العام للزاوية $P > M$ ن هو $\{ 2\pi + \theta : \theta \in]-\pi, \pi[\}$.

- ولعلك توصلت إلى أن :

$\theta = \pi \iff$ طول $[\widehat{PN}] = \frac{1}{4} \times 2\pi = \frac{\pi}{2}$ (وحدة طول)

فيكون القياس الرئيسي للزاوية $P > M$ ن هو : $\frac{\pi}{2}$ راديان

شكل (١٧ - ٢)



شكل (١٧ - ٢)

والقياس العام هو : $\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi + \theta : \theta \in]-\pi, \pi[\}$

- وتجد بسهولة أن :

$\theta = 0 \iff$ طول القوس $[\widehat{PN}] = \frac{1}{4} \times 2\pi = \pi$ (وحدة طول)

فيكون القياس الرئيسي للزاوية $P > M$ ن = π راديان

مثال (١-٣) :

- أوجد طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها الرئيسي $\frac{٣٢}{١١}$ راديان
- (١) إذا كان القوس من دائرة الوحدة
- (٢) إذا كان القوس من دائرة نصف قطرها ١٤ سم ($٣ \approx -\frac{٢٢}{٧}$)

الحل :

(١) إذا كان القوس من دائرة الوحدة فإن طوله = $-\frac{٣٢}{١١}$ وحدة طول

$٦ \approx -\frac{٢٢}{٧} \times \frac{٣}{١١}$ وحدة طول

(٢) إذا كان القوس من دائرة نصف قطرها = ١٤ سم ، فإنه (كما رأينا في الصف الأول)

طول القوس هو $ل = |هـ| \times \text{نق} \quad (١-٣)$

حيث $|هـ|$ قياس الزاوية المركزية المقابلة لذلك القوس مقدراً بالراديان .

فيكون طول القوس $ل = \frac{٣٢}{١١} \times ١٤ \approx ١٤ \times \frac{٢٢}{٧} \times \frac{٣}{١١} \approx$

$١٢ =$ سم .

مثال (٢-٣) :

أوجد طول القوس من دائرة نصف قطرها ١٠.٥ سم ، إذا علمت أن القياس الرئيسي للزاوية

المركزية المقابلة له $هـ = -\frac{٥}{١١}$ راديان . ($٣ \approx \frac{٢٢}{٧}$)

الحل :

$ل = |هـ| \times ١٠.٥ \approx ١٠.٥ \times \frac{٢٢}{٧} \times \frac{٥}{١١} \approx ١٥ =$ سم

مثال (٣-٣) :

أوجد ما يساويه الراديان (الزاوية نصف القطرية) بالدرجات وماتساوي الدرجة بالراديان

($٣ \approx -\frac{٢٥٥}{١١٣}$)

الحل :

تعلم أن العلاقة بين قياسي زاوية ، قياسها بالتقدير الستيني (س °) وقياسها بالتقدير الدائري

$$(هـ \text{ راديان}) \text{ هي : } \frac{\text{س}^\circ}{180} = \frac{هـ}{\text{ط}} \quad (٢ - ٣)$$

$$\text{فعندما تكون هـ} = 1 \text{ راديان فإن س} = \left(\frac{180}{\text{ط}} \right) \approx ٤٥ \text{ } ١٧ \text{ } ٥٧^\circ$$

$$\text{وعندما تكون س} = 1^\circ \text{ فإن هـ} = \frac{\text{ط}}{180} \text{ راديان} \approx 0.1745 \text{ ر.}$$

فالراديان (الزاوية نصف القطرية) $\approx ٤٥ \text{ } ١٧ \text{ } ٥٧^\circ$

والدرجة $\approx 0.1745 \text{ راديان} .$

تدريب (٣ - ٤)

١ - تحقق من صحة القياسات الموضحة بالجدول الآتي :

٣٦٠°	٢٧٠°	١٨٠°	١٣٥°	١٢٠°	٩٠°	٦٠°	٤٥°	٣٠°	الزاوية بالدرجات
٢ ط	$\frac{٣ط}{٢}$	ط	$\frac{٣ط}{٤}$	$\frac{٣ط}{٣}$	$\frac{ط}{٢}$	$\frac{ط}{٣}$	$\frac{ط}{٤}$	$\frac{ط}{٦}$	الزاوية بالراديان

٢ - اكتب القياس العام للزاويا التي قياساتها الرئيسة : $\frac{ط}{٦}$ ، $\frac{ط}{٣}$ ، ٧٥° ، ١٢٠°

مثال (٣ - ٤) :

احسب طول القوس المقابلة لزاوية مركزية قياسها ٢١٠° في دائرة نصف

$$\text{قطرها } ٣٣٩ \text{ سم} \quad \cdot \quad \text{ط} \approx \frac{٢٥٥}{113}$$

الحل :

$$ل = | هـ | \times \text{نق} \quad \text{حيث هـ مقيسة بالراديان} .$$

$$\frac{س}{ط} = \frac{س}{١٨٠} \quad س = ٢١٠$$

$$\frac{س}{ط} = \frac{٢١٠}{١٨٠} \quad \Leftarrow \quad س = \frac{٧ط}{٦} \text{ راديان .}$$

$$ل = \frac{٧ط}{٦} \times ٣٣٩ \approx \frac{٣٥٥}{١١٣} \times ٣٣٩ \times \frac{٧}{٦} \approx ١٢٤٢٥ \text{ سم}$$

مثال (٣-٥) :

أوجد بالتقديرين الدائري والستيني قياس الزاوية المركزية الموجبة التي تقابل قوساً طوله ١٠ سم في دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم ثم أوجد تعبيراً عاماً لقياسات مجموعة الزوايا المشتركة مع هذه الزاوية في كل من الضلع الابتدائي والضلع النهائي وذلك بالتقديرين الدائري والستيني . $ط \approx \frac{٢٢}{٧}$

الحل :

$$ل = ١٠ \text{ سم ، نق } = ١٥ \text{ سم ، } ل = |س| \text{ نق}$$

$$١٠ < |س| = ١٥ \times |س| \quad \Leftarrow \quad |س| < ٠ \quad \Leftarrow \quad |س| = س$$

$$\Leftarrow س = \frac{١٠}{١٥} = \frac{٢}{٣} \text{ راديان}$$

$$= \frac{١٨٠}{ط} \times \frac{٢}{٣} =$$

$$\approx ١٢٠ \times \frac{٧}{٢٢} \approx ٣٨ \quad ١٠ \quad ٥٥$$

القياس العام المطلوب :

$$\text{بالتقدير الدائري : } \left\{ \frac{٢}{٣} + ٢١ م ط : م \in \mathcal{M} \right\}$$

$$\text{بالتقدير الستيني : } \left\{ ٣٨ + ١٠ م ٥٥ : م \in \mathcal{M} \right\}$$

تمارين (٣ - ١)

(١) الزاوية الموجهة $\langle P م ب \rangle$ في وضع قياسي مرسومة على دائرة الوحدة (د) ، فإذا كان $هـ$ أصغر قياس لهذه الزاوية ، وكانت $\{ ب \} = (د) \cap [م ب ، ب = (س ، ص)$ ،

فأكمل مايلي :

$$(P) \quad \langle هـ \rangle > \frac{\pi}{4} \iff (س < ٠ \text{ و } ص < ٠)$$

$$(ب) \quad \frac{\pi}{4} > هـ > \pi \iff (\dots \text{ و } \dots)$$

$$(ج) \quad \pi > هـ > \frac{\pi}{4} \iff \left\{ \begin{array}{l} \dots \text{ و } \dots \\ \text{أو: } -\pi > هـ > -\frac{\pi}{4} \end{array} \right.$$

$$(د) \quad \dots > هـ > \dots \iff \left\{ \begin{array}{l} \dots < ٠ \text{ و } ص < ٠ \\ \text{أو: } \dots > هـ > \dots \end{array} \right.$$

$$(هـ) \quad (هـ = ٠ \text{ أو } هـ = ٢\pi) \iff (\dots ، \dots) = ب$$

$$(و) \quad (هـ = \dots \text{ أو } هـ = -\frac{\pi}{4}) \iff (\dots ، \dots) = ب$$

$$(ز) \quad (هـ = \frac{\pi}{4} \text{ أو } هـ = -\frac{\pi}{4}) \iff (\dots ، \dots) = ب$$

$$(ح) \quad (هـ = \pi \text{ أو } هـ = \dots) \iff (\dots ، \dots) = ب$$

(٢) أكمل الجدول الآتي :

	١٠٥°	٧٥°			٣٠°		٢٢٥°	١٥٠°	الزاوية بالدرجات
$\frac{\pi}{10}$			$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$			الزاوية بالراديان

(٣) إذا كانت الزاوية \overleftarrow{P} م ب في وضع قياسي ، فاكتب تعبيراً عاماً لقياسات هذه الزاوية ، وذلك عندما يكون القياس الرئيسي لهذه الزاوية معطى وفق ما يأتي :

$$\begin{aligned} (P) \quad \text{ق} (\overleftarrow{P} \text{ م ب}) &= ٧٢ \\ (ب) \quad \text{ق} (\overleftarrow{P} \text{ م ب}) &= -\frac{٢٣}{٤} \\ (ح) \quad \text{ق} (\overleftarrow{P} \text{ م ب}) &= -٦٠ \\ (د) \quad \text{ق} (\overleftarrow{P} \text{ م ب}) &= ٣ \text{ رادياناً} . \end{aligned}$$

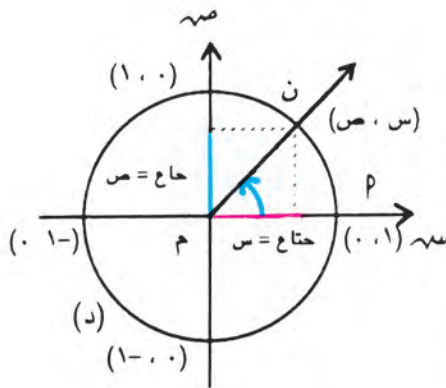
(٤) أوجد طول القوس المقابلة للزاوية التي قياسها هـ من دائرة طول نصف قطرها ١٠سم ، في الحالات التالية :

$$\begin{aligned} (P) \quad \text{هـ} &= -\frac{\pi}{٦} \text{ راديان} \\ (ب) \quad \text{هـ} &= ١٣٥ \\ (ح) \quad \text{هـ} &= -\frac{٢\pi}{٣} \text{ راديان} \\ (د) \quad \text{هـ} &= ٢٠ \text{ هـ} \end{aligned}$$

(٥) إذا كانت \overleftarrow{P} م ن في وضع قياسي ، بحيث : $\text{ق} (\overleftarrow{P} \text{ م ن}) > \text{ق} (\overleftarrow{P} \text{ م ن})$ ، والدائرة د (م ، ١٠سم) وكان طول القوس $[\widehat{P}]$ مساوياً ١٥سم .
 فأوجد بالتقدير الدائري أصغر قياس للزاوية \overleftarrow{P} م ن .

٣ - ٣ الدوال الدائرية :

(١) دالتا الجيب وجيب التمام



في الشكل (٣ - ٢٢) الزاوية الموجهة \overleftarrow{P} م ن في وضع قياسي ، قياسها ع راديان (حيث ع \in ح)
 فإذا كانت | هـ | طول القوس $[\widehat{P}]$ المقابلة للزاوية \overleftarrow{P} م ن على دائرة الوحدة (د) ، فإنك تعلم أن :

شكل (٣ - ٢٢)

تعريف (٣ - ٢)

$$\text{ع} = \text{هـ} + ٢\text{م} \text{ ط} ، \text{م} \in \text{ص}$$

تعريف (٣-٤)

إذا كانت الزاوية الموجهة $\langle P م ن \rangle$ بوضع قياسي ، وقياسها ع ، وكانت ن (س ، ص) نقطة تقاطع ضلعها النهائي مع دائرة الوحدة (د) فإن العددين س ، ص يتعلقان بقياس الزاوية $\langle P م ن \rangle$ ، ونقول تعريفاً :
قيمة س هي جيب تمام هذه الزاوية ونرمز له بالرمز حتاع
قيمة ص هي جيب هذه الزاوية ونرمز له بالرمز حا ع .
العدنان : حتاع ، حا ع يسميان : العددين المثلثين للزاوية $\langle P م ن \rangle$

وحيث إن العددين حتاع ، حا ع يتغيران تبعاً لتغير الزاوية $\langle P م ن \rangle$ ، وبالتالي تبعاً لتغير قياسها ع ، أي تبعاً لموضع النقطة ن على دائرة الوحدة ، لذلك نسمي كلاً منهما دالة دائرية ومن ذلك نستطيع كتابة التعريف الآتي :

تعريف (٣-٥)

الدالة حتا : ح ← ح ، حيث حتاع = س تسمى دالة جيب التمام
والدالة حا : ح ← ح ، حيث حا ع = ص تسمى دالة الجيب

وقد سبق لك التعرف على هاتين الدالتين في مقرر الصف الأول الثانوي في حالة $ع \in [٠, ٩٠]$ نتائج (٣-١) :

(٢) في المستوي الموجه المنسوب إلى نظام إحداثي متعامد ، إذا كانت $\langle P م ن \rangle$ في وضع قياسي ، ق ($\langle P م ن \rangle$) = ع ، ن = (س ، ص) : $ص^٢ + س^٢ = ١$
فإن : حتاع = س ، حا ع = ص

(ب) من النتيجة السابقة ينتج مباشرة أن :

$$(٣ - ٢) \quad \begin{array}{l} ١ - \text{حتا} \geq ١ > \\ ١ - \text{حاع} \geq ١ > \end{array}$$

كما ينتج أنه :

$$\text{لكل } \text{ع} \supseteq \text{ح} : ١ = \text{حاع}^2 + \text{حتا}^2$$

وتكتب بالشكل :

$$(٤ - ٣) \quad \text{حتا}^2 \text{ع} + \text{حاع}^2 \text{ع} = ١$$

(د) بالرجوع إلى الشكل (٢٢ - ٣) يمكنك أن تستنتج بسهولة أن :

$$\text{حتا} = \text{حاع} \quad \text{حاع} = \text{حتا}$$

$$\text{حتا}^2 \text{ط} = ١ \quad \text{حاع}^2 \text{ط} = ١$$

$$\text{حتا} = \frac{\text{ط}}{١} \quad \text{حاع} = \frac{\text{ط}}{١}$$

$$\text{حتا} \text{ط} = ١ \quad \text{حاع} \text{ط} = ١$$

$$\text{حتا} = \left(\frac{\text{ط}}{١} - \right) \quad \text{حاع} = \left(\frac{\text{ط}}{١} - \right) \quad \text{حتا} = \frac{\text{ط}^2}{١} \quad \text{حاع} = \frac{\text{ط}^2}{١}$$

(د) حيث إن { ع = هـ + ٢ م ط : م } هي مجموعة قياسات الزاوية التي ضلعها

الابتدائي [م] وضلعها النهائي [م ن ، وبالرجوع إلى الشكل (٢٢ - ٣) تجد أن :

$$(٥ - ٣) \quad \begin{array}{l} \text{حتا} = (\text{هـ} + ٢ م ط) \text{حاع} , \text{حاع} = \text{حاع} \\ \text{حاع} = (\text{هـ} + ٢ م ط) \text{حتا} , \text{حتا} = \text{حتا} \end{array}$$

مثال (٦-٣) :

عبر بدلالة أصغر قياس موجب للزاوية $\langle P م ب \rangle$ عن كل من حتاع، حاع حيث $ع = ق (\langle P م ن \rangle)$ ،
إذا كانت إحدى قيم ع معطاة كما يلي :

$$(P) ع = ٤٣٠ \quad (ب) ع = \frac{٥}{٧} ط$$

$$(ح) ع = ٤٠ - ٣٦٠ م ، م \in \mathbb{R}$$

الحل :

$$(P) ع = ٤٣٠ = ٧٠ + ٣٦٠ \text{ فيكون :}$$

$$\text{حتاع} = \text{حتا} (٣٦٠ + ٧٠) = ٧٠$$

$$\text{حاع} = \text{حا} (٣٦٠ + ٧٠) = ٧٠$$

$$(ب) ع = \frac{٥}{٧} ط = ٢ + \frac{ط}{٧}$$

$$\text{حتاع} = \text{حتا} (٢ + \frac{ط}{٧}) = \frac{ط}{٧} = ١$$

$$\text{حاع} = \text{حا} (٢ + \frac{ط}{٧}) = \frac{ط}{٧} = ١$$

$$(ح) ع = ٤٠ - ٣٦٠ م ، م \in \mathbb{R}$$

نحصل على أصغر قياس موجب عندما نضع $م = ١$

$$\leftarrow ع = ٤٠ - ٣٦٠ = ٣٢٠ \text{ ، فيكون :}$$

$$\text{حتاع} = \text{حتا} ٣٢٠ ، \text{حاع} = \text{حا} ٣٢٠$$

تدريب (٥ - ٣)

(١) الزاوية الموجهة $\langle P م ب \rangle$ في وضع قياسي

إذا علمت أن $ق (\langle P م ب \rangle) = ع$ فعبر عن كل من حتاع وحاع بدلالة أصغر قياس موجب

للزاوية $\langle P م ب \rangle$ في كل من الحالات الآتية :

$$(P) ع = ٤٠ + ٣٦٠ م ، م \in \mathbb{R}$$

$$(ب) ع = ٥٠ - ٣٦٠ م ، م \in \mathbb{R}$$

$$(ح) \quad ع = -\frac{ط}{٤} + ٢ ط م ، \quad م \in \mathbb{R}$$

$$(د) \quad ع = \frac{ط٥}{٧} + ٢ ط م ، \quad م \in \mathbb{R}$$

(٢) إذا كانت حتاع = . فما هي قيم ع ، ع \in [٠ ، ٢ ط] ؟

(٣) أعد السؤال السابق حيث ع \in ح

(٤) أعد حل التمرينين (٢) ، (٣) في حالة حاع = .

(٢) دالة الظل :

لنتعرف على العدد الحقيقي $\frac{ص}{س} = \frac{حاع}{حتاع}$

من الواضح أن وجود هذا العدد يقتضي كون س \neq . أي : حتاع \neq .
لوقمت بحل التمرين (٣) من التدريب (٣ - ٥) لوجدت أن :

$$\left. \begin{array}{l} (١) \quad م \in \mathbb{R} ، \quad ع \neq -\frac{ط}{٤} + ٢ ط م ، \quad ص \in \mathbb{R} \\ (٢) \quad م \in \mathbb{R} ، \quad ع \neq \frac{ط٢}{٤} + ٢ ط م ، \quad ص \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \leftarrow \text{حتاع} \neq .$$

ومن الواضح أن الشرط (٢) يكتب :

$$(٢) \quad ع \neq \frac{ط}{٤} + ٢ ط م \quad \text{أو} \quad ع \neq \frac{ط}{٤} + ٢ ط م + ١$$

$$(١) \quad \text{والشرط (١) يكتب} \quad ع \neq \frac{ط}{٤} + ٢ ط م$$

فالشرط (٢) يعني أن : $ع \neq \frac{ط}{٤} +$ عدد فردي من ط

والشرط (١) يعني أن : $ع \neq \frac{ط}{٤} +$ عدد زوجي من ط

وعلى هذا يمكن جمع الشرطين بشرط واحد هو :

$$ع \neq \frac{ط}{٤} + ٢ ط م ، \quad م \in \mathbb{R}$$

تعريف (٣-٦) :

نسمي العدد الحقيقي $\frac{حاع}{حتاع}$ (حيث $ع \neq \frac{ط}{٤} + ٢ ط م ، م \in \mathbb{R}$)

ظل الزاوية $\langle ط م \rangle$ باعتبار $\langle ط م \rangle = ع$ ونرمز له ظاع فيكون :

ظاع = $\frac{ص}{س}$ ، حيث $ن = (س ، ص)$ ، $س^٢ + ص^٢ = ١$ انظر الشكل (٣ - ٢٢)

وبالطريقة نفسها التي سلكتها في حتاع ، حا ع نقول :

تعريف (٢-٧)

نعرف الدالة الدائرية ظا ع كما يلي :

$$\text{ظا} : \text{ح} - \text{ع} = \left\{ \frac{\text{ط}}{\text{ق}} + \text{م} : \text{م} \right\} \left(\text{ص} \right) \leftarrow \text{ح}$$

$$\text{حيث ظا ع} = \frac{\text{حا ع}}{\text{حتا ع}} \quad (٢-٦)$$

نتائج (٢-٢)

(پ) من النتيجة (٢-١ / ح) نجد أن :

$$\text{ظا} = \frac{\text{جا}}{\text{حتا}} = \frac{\text{جا}}{١} = \text{جا}$$

$$\text{ظا} = (\text{ط} - \text{ط}) = ٠$$

ونستطيع أن نلاحظ بسهولة أن كلاً من :

$$\text{ظا} - \frac{\text{ط}}{\text{ق}} \quad , \quad \text{ظا} \frac{\text{ط}^2}{\text{ق}} \quad , \quad \text{ظا} - \frac{\text{ط}}{\text{ق}} \quad , \quad \dots \quad , \quad \text{ظا} \left(\frac{\text{ط}}{\text{ق}} + \text{م} : \text{م} \right) \left(\text{ص} \right) \quad , \quad \text{غير معرفة}$$

(ب) من النتيجة (٢-١ / د) ينتج أنه إذا كان $\frac{\text{ط}}{\text{ق}} + \text{م} : \text{م} \neq \text{ظا}$ (م) $\left(\text{ص} \right)$

$$\text{ظا} = (\text{ه} + ٢ \text{م} : \text{ط}) = \text{ظا ه} \quad , \quad \text{م} \left(\text{ص} \right) \quad \text{فإن} :$$

مثال (٣-٧) :

عبر عن ظا ع بدلالة أصغر قياس موجب للزاوية $\langle \text{م} : \text{ن} \rangle$ ، إذا كانت $\text{ع} = \text{ق} \left(\langle \text{م} : \text{ن} \rangle \right)$ في

الحالتين التاليتين :

$$\text{ع} = \frac{\text{ط}٧}{٣} \quad (ب)$$

$$\text{ع} = ٣٧٠ \quad (پ)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \text{ظا} = \text{ع} &= 360 + 10 = 370 = \text{ع} \quad (1) \\ \text{ظا} = \text{ع} &= 2 + \frac{\text{ط}}{3} = \frac{7\text{ط}}{3} = \text{ع} \quad (2) \end{aligned}$$

(3) دوال دائرية أخرى

تعريف (2-8)

نعرف فيما يلي الدوال التالية :

(1) القاطع ونرمز له بالرمز قاع ويكون :

$$\text{قاع} = \frac{1}{\text{حتا ع}} , \text{ع} \neq \text{م} + \frac{\text{ط}}{2} , \text{م} \in \mathbb{R}$$

(2) قاطع التمام ، ونرمز له بالرمز قتا ع ويكون :

$$\text{قتا ع} = \frac{1}{\text{حاع}} , \text{ع} \neq \text{م} , \text{م} \in \mathbb{R}$$

(3) ظل التمام ونرمز له بالرمز ظتا ع ويكون :

$$\begin{aligned} \text{ظتا ع} &= \frac{1}{\text{ظا ع}} \\ \text{حاع} &= \frac{\text{حتا ع}}{\text{حاع}} , \text{ع} \neq \text{م} , \text{م} \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2-7)$$

ملحوظة (3-4)

حيث إن حاع في مقام كل من قتا ع ، ظتا ع ، لذا يجب أن يكون حاع $\neq 0$. ونعلم أن :

$$(1) \text{حاع} = 0 \text{ عندما } \text{ع} = 0 + 2\text{م} = \text{ط} = 2\text{م} \quad (1)$$

$$(2) \text{وعندما } \text{ع} = \text{ط} + 2\text{م} = 1 + 2\text{م} = \text{ط} \quad (2)$$

إن (1) يمثل مجموعة الأعداد الزوجية من ط

إن (2) يمثل مجموعة الأعداد الفردية من ط

وعليه فإن (١) ، (٢) معاً نعبر عنهما بقولنا $ع = م ط حيث م \in ص$
 لذلك فإن الشرط $حاع \neq . \iff ع \neq م ط م \in ص$
 وهذا ما اشتراطناه في الفقرتين (٢) ، (٣) من التعريف السابق .
 نتيجة (٣ - ٣)

نستنتج بسهولة أن :

$$قا = (هـ + ٢ م ط) = قا هـ$$

$$قتا = (هـ + ٢ م ط) = قتا هـ$$

$$ظتا = (هـ + ٢ م ط) = ظتا هـ$$

(٤) قاعدة الإشارات

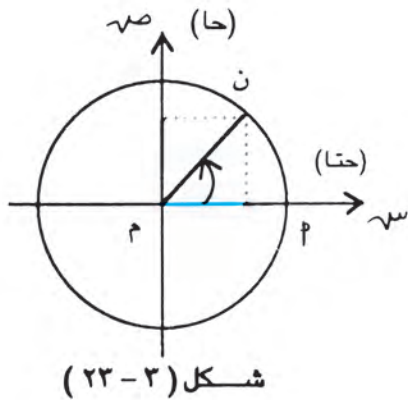
رأينا أنه : لأي نقطة ن (س ، ص) واقعة على دائرة الوحدة فإن : $حتاع = س$ ، $حاع = ص$ ،
 انظر الشكل (٢٣ - ٢) لذا فإننا نستطيع أن نسمي المحور م صـ ، في هذه الحالة ، محور
 جيب التمام كما نسمي المحور م صـ محور الجيب وهذا يعني أن :

إشارة حتاع هي إشارة س نفسها

وإشارة حاع هي إشارة ص نفسها

فإذا كانت الزاوية التي قياسها ع

في الربع الأول .



$$\left. \begin{array}{l} \cdot < حتاع \\ \cdot < حاع \end{array} \right\} \iff \left. \begin{array}{l} \cdot < س \\ \cdot < ص \end{array} \right\} \text{ فإن :}$$

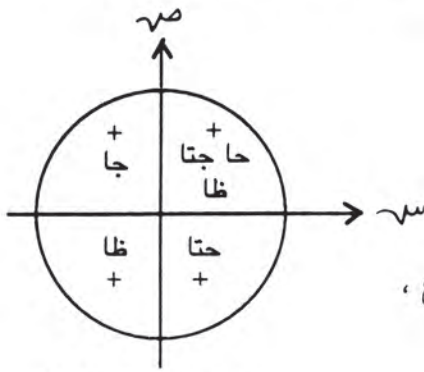
$$\cdot < \frac{حاع}{س} = \frac{حاع}{حتاع} = \frac{ص}{س}$$

وإذا كانت الزاوية التي قياسها ع في الربع الثاني فإن :

$$\left. \begin{array}{l} \cdot > حتاع \\ \cdot < حاع \end{array} \right\} \iff \left. \begin{array}{l} \cdot > س \\ \cdot < ص \end{array} \right\}$$

وهكذا

والشكل (٣ - ٢٤) يبين الدوال التي إشارات موجبة في كل من الأرباع الأربعة ، وما سواها



شكل (٣ - ٢٤)

سالبا ، وذلك بالنسبة لكل من حاع ، حتاع ، ظاع .

ولعلك تلاحظ أن إشارة قاع مثل إشارة حتاع ،

وإشارة قناع مثل إشارة جاع وإشارة قناع مثل إشارة ظاع .

تدريب (٣ - ٦)

أوجد إشارة كل من حتاع ، حاع ، ظاع ، قاع ، قناع ، قناع ،

إذا علمت أن الزاوية التي قياسها ع :

(١) في الربع الثالث .

(٢) في الربع الرابع .

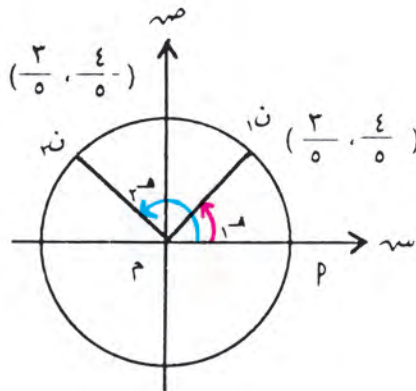
مثال (٣ - ٨) :

الزاوية الموجهة $\left\langle P \text{ م } N \right\rangle$ في وضع قياسي ، (د) دائرة الوحدة ، P ، $N \in (د)$. فإذا كانت

$P(0, 1)$ ، $N\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ ، $\left\langle Q \text{ م } N \right\rangle$ ، فأثبت أنه توجد قيمتان لـ س

وعين على الشكل الزاويتين المقابلتين لهما ثم أوجد في كل حالة النسب المثلثية لهذه الزاوية .

الحل :



شكل (٢ - ٢٥)

$$N \in \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \in (د)$$

$$1 = 2ص + 2س \iff$$

$$1 = \frac{9}{25} + 2س \iff$$

$$س = \frac{11}{50} \iff$$

وجود نقطتين على دائرة الوحدة هما :

$$N_1\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) ، N_2\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

انظر الشكل (٢ - ٢٥)

البرهان

$$(1) \quad 1 + \text{ظا}^2 = \frac{\text{حا}^2}{\text{حتا}^2} + 1 = \frac{\text{حا}^2 + \text{حتا}^2}{\text{حتا}^2} = \frac{1}{\text{حتا}^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\text{قا}^2}\right)^2} = \text{قا}^2$$

(2) برهان الفقرة الثانية متروك للطالب .

تدريب (3-7)

(1) بسّط مايلي :

$$(2) \quad \frac{\text{حا}^2}{\text{طا}^2} \quad (2) \quad 1 - \frac{1}{\text{حتا}^2} \quad (ب)$$

$$(3) \quad \text{حتا} + \text{حا} \cdot \text{ظا} \quad (ج) \quad \frac{1}{\text{حا} - 1} + \frac{1}{\text{حا} + 1} \quad (د)$$

$$(2) \quad \text{أثبت أن : } \frac{\text{ظا}^2}{1 + \text{طا}^2} = \text{حا}^2$$

(3) برهن على صحة الفقرة (2) من النظرية (3-1)

مثال (3-9) :

إذا كانت $\angle \text{ه} > \angle \text{ط} > \angle \text{ظا} = 1$ فالمطلوب :

- (1) أثبت وجود قيمتين ه_1 ، ه_2 للزاوية ه .
- (2) أوجد في كل حالة : حا^2 ، حتا^2 .
- (3) أوجد النقطتين ن_1 ، ن_2 على دائرة الوحدة ، الناتجتين عن تقاطعها مع الضلع النهائي للزاوية $\angle \text{م} \text{ن} \text{پ}$ في كل من الحالتين السابقتين ، إذا علمت أن الزاوية في وضع قياسي . ماهي العلاقة بين القيمتين ه_1 ، ه_2 ؟

الحل :

(1) $\text{ظا} = 1 < \angle \text{ه} < \angle \text{ط} < \angle \text{ظا} = 1$. تمثل زاوية في الربع الأول أو في الربع الثالث ، وليكن القياس

الأول ه_1 والقياس الثاني ه_2 ، انظر الشكل (3-26)

$$(2) \quad 1 + \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2-1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1 \quad \leftarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1 \quad \leftarrow$$

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$ فعندما تكون الزاوية بالربع الأول : $h = \sqrt{2}$ ، $h = 1$

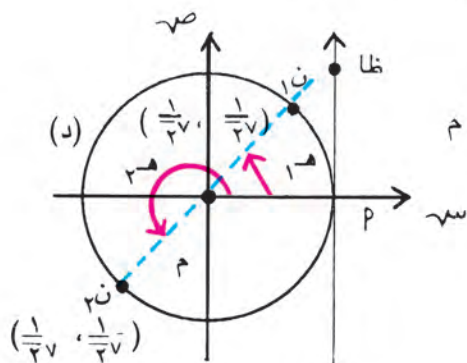
$$\text{فإن } \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1 \quad \leftarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1 \quad \leftarrow \quad \text{فإن } \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1 \quad \leftarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1 \quad \leftarrow$$

وعندما تكون الزاوية بالربع الثالث : $h = \sqrt{2}$ ، $h = -1$

$$\text{فإن } \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1 \quad \leftarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1 \quad \leftarrow \quad \text{فإن } \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1 \quad \leftarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1 \quad \leftarrow$$

$$(2) \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = N_1 \quad , \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = N_2$$

شكل (2-26)



شكل (2-26)

\leftarrow N_1, N_2 متناظرتان بالنسبة لنقطة الأصل م

$$\leftarrow \quad h_2 - h_1 = \text{ط} .$$

ملحوظة (3-5)

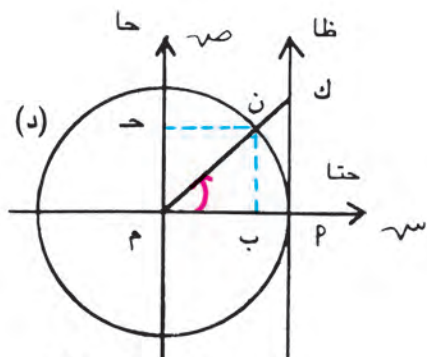
في الشكل (2-27) الزاوية الموجهة $\langle P, M \rangle$ في

وضع قياسي ، $Q = \langle P, M \rangle = E, E \supseteq C$ ،

P, N تنتميان إلى دائرة الوحدة .

(د) ، المماس في P يلاقي الضلع النهائي للزاوية في K .

لعلك تستنتج من تشابه المثلثين M, B, N ، P, M, K .



شكل (2-27)

إن : $\frac{|ابن|}{|بم|} = \frac{|كپ|}{|پم|}$ ، وبملاحظة أن :

$|م ح| = |ابن|$ ، وباعتبار القطع ، المستقيمة موجهة يصبح التناسب السابق :

$$\frac{\overline{كپ}}{۱} = \frac{\text{حاع}}{\text{حتاع}} \leftarrow \frac{\overline{كپ}}{پم} = \frac{\overline{م ح}}{\overline{بم}}$$

أو : $\overline{كپ} = \text{ظاع}$

أي أن ظاع تتعين قيمتها بالعدد الذي يقيس إحداثي النقطة ك على المحور المنطبق على مماس دائرة الوحدة في P ، والموجه كاتجاه محور الصادات ، حيث ك نقطة تقاطع الضلع النهائي للزاوية $\langle P م ن \rangle$ مع ذلك المماس . المحور P ك نسميه محور الظل .

تدريب (۸ - ۳)

أعد رسم الشكل (۲ - ۲۶) وارسم عليه محور الظل ثم حدد عليه النقطة ك التي إحداثيها يساوي كلاً من ظا هـ ، ظا هـ ، ماذا تلاحظ ؟

مثال (۱۰ - ۳) :

إذا كان قياس زاوية موجهة تقع في الربع الثالث يساوي هـ وكان $|\text{حتا هـ}| = \frac{۵}{۱۳}$ فأوجد كلاً من : حاه ، حاه ، ظاه .

الحل :

$$|\text{حتا هـ}| = \frac{۵}{۱۳} ، \text{الزاوية تقع في الربع الثالث} \Rightarrow \text{حتا هـ} < ۰ . \Rightarrow \text{حتا هـ} = -\frac{۵}{۱۳}$$

$$\text{حاه} + \text{حاه} = ۱ \Rightarrow \text{حاه} = ۱ - \text{حتا هـ} = ۱ - \left(-\frac{۵}{۱۳}\right) = \frac{۲۵}{۱۳}$$

$$\text{حاه} = \pm \frac{۱۲}{۱۳} \text{ لكن } \text{حاه} > ۰ . \text{ (لماذا ؟)}$$

$$\text{حاه} = \frac{۱۲}{۱۳} \Rightarrow \text{ظاه} = \frac{\text{حاه}}{\text{حتاه}} = \frac{۱۲}{۵}$$

تمارين (٣ - ٢)

(١) إذا كانت ٣ حاه = ٤ حتاه ، . > ه → $\frac{ط}{٢}$ فأحسب كلاً من حاه ، حتاه ، ظاه .

(٢) أعد حل المسألة السابقة إذا علمت أن ط > ه > $\frac{ط}{٢}$.

(٣) إذا كانت حاه = $\sqrt{٣٧}$ حتاه ، $\frac{ط}{٢}$ > ه > ٢ ط فأحسب كلاً من ظاه ، حتاه ، حاه .

(٤) إذا كانت ١٣ حتاه + ٥ = ٥ ، . > ه > ٢ ط . فأوجد كلاً من حتاه ، حاه ، ظاه

(لاحظ وجود حلين)

(٥) إذا كانت | ظاه | = $\frac{١}{٣}\sqrt{٣}$ ، ه قياس زاوية تقع في الربع الرابع ، فأوجد كلاً من :

ظاه ، حاه ، حتاه ، قتا ه ، قاه ، ظتا ه .

(٦) إذا كانت ه أقل قياس لزاوية موجهة في عكس اتجاه دوران عقارب الساعة ، فعين إشارة كل

من : حتاه - ٢ ، $-\frac{٢}{٢}$ حاه ، ٢ حاه - ٤ .

هل يمكن أن يكون ٢ حاه - ٤ = ٥ ؟ لماذا ؟

(٧) إذا كانت ٤ حاه - ٨ حاه + ٣ = ٥ ، فأوجد قيمة حاه وإذا كانت $-\frac{ط}{٢}$ > ه > ط

فأوجد قيمة كل من حتاه ، ظتا ه .

(٨) أثبت أن النقطة ن $(\frac{١}{٢} - \sqrt{\frac{٣}{٢}} ، \frac{١}{٢})$ تقع على دائرة الوحدة ، وإذا مر بالنقطة ن الضلع

النهائي لزاوية موجهة ، في وضع قياسي وكان قياسها ه . فأوجد قيمة كل من

حتاه ، حاه ، ظاه .

(٩) في المسألة السابقة ، إذا كانت ن $(\frac{٢}{٥} ، س)$ ، . > ه > ٢ ط ، فأوجد س وبين أنه

توجد قيمتان لقياس ه ، ثم أوجد في كل مرة : حاه ، قاه ، ظتا ه .

سنبحث في هذه الفقرة عن قواعد أخرى لتبسيط قيم الدوال المثلثية :

نظرية (٣ - ٢)

لأي زاوية موجهة قياسها α فإن :

$$(\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta)) = (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta, \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)$$

البرهان

في الشكل (٢٨ - ٣) الدائرة (د) هي دائرة

الوحدة $N = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ $M = (\cos \beta, \sin \beta)$

نرسم الوتر $[NM]$ \perp المحور SV فيكون :

$N' = (\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta))$

$$(1) \quad N' = (\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta)) \text{ (لماذا؟)}$$

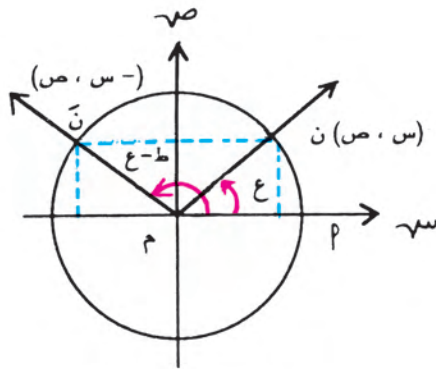
واضح أن $Q = \langle PM \rangle = \alpha - \beta$

$$(2) \quad N' = (\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta))$$

من (١) ، (٢) ينتج أن :

$$(\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta)) = (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta, \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)$$

أي أن :



شكل (٢٨-٣)

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

وبفرض $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \beta$ ، $\alpha \neq \beta$ ، $\alpha \neq \frac{\pi}{2} - \beta$:

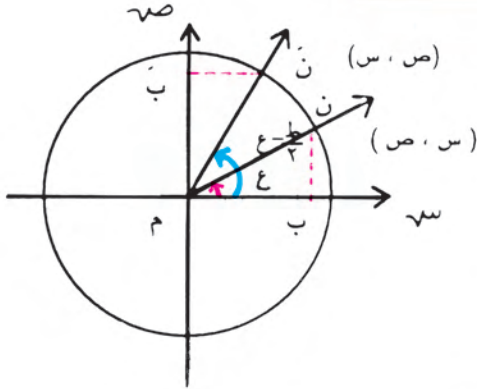
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

(٣-١١)

نظرية (٣ - ٥)

لأي زاوية موجبة قياسها ϵ فإن :

$$\left(\text{حتا} \left(\epsilon - \frac{\pi}{4} \right), \text{حا} \left(\epsilon - \frac{\pi}{4} \right) \right) = \left(\text{حا} \epsilon, \text{حتا} \epsilon \right)$$



شكل (٣-٣١)

لو استعنت بالشكل (٣ - ٣١) حيث (د)

دائرة الوحدة لوجدت أن :

$$\text{ن} \left(\text{حا} \epsilon, \text{ص} \epsilon \right) = \text{ن} \left(\text{حا} \left(\epsilon - \frac{\pi}{4} \right), \text{ص} \left(\epsilon - \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$(١) \quad \left(\text{حتا} \left(\epsilon - \frac{\pi}{4} \right), \text{حا} \left(\epsilon - \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

ومن تطابق المثلثين م ب ن ، م ب ن (لماذا ؟)

$$(٢) \quad \text{نجد : ن} \left(\text{ص} \epsilon, \text{س} \epsilon \right) \text{ أي أن ن} \left(\text{حا} \epsilon, \text{حتا} \epsilon \right)$$

من (١) ، (٢) ينتج المطلوب . ومنه نجد :

$$\text{حا} \epsilon = \text{حتا} \left(\epsilon - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{حا} \left(\epsilon - \frac{\pi}{4} \right) = \text{حا} \epsilon$$

$$\text{وبفرض } \epsilon \neq \text{م} \text{ ط} \text{ م} \text{ } \exists \text{ ص}$$

$$\text{ظا} \left(\epsilon - \frac{\pi}{4} \right) = \text{ظتا} \epsilon \quad \text{لماذا ؟}$$

(٣ - ١٤)

نظرية (٣ - ٦)

لأي زاوية موجبة قياسها ϵ فإن :

$$\left(\text{حتا} \left(\epsilon + \frac{\pi}{4} \right), \text{حا} \left(\epsilon + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \left(\text{حا} \epsilon, \text{ص} \epsilon \right)$$

البرهان

متروك للطلاب مستعيناً بالشكل (٣ - ٣٢) وعليه يكون :

$$(ب) \text{ حتا } \left(\frac{\text{ط}^2}{\text{ع}} - \text{ع} \right) = \text{حتا} \left(\frac{\text{ط}}{\text{ع}} + (\text{ع} - \text{ط}) \right)$$

$$= \text{حا} (\text{ع} - \text{ط}) \quad (\text{لماذا ؟})$$

$$= \text{حاع}$$

$$\text{حا} = \left(\frac{\text{ط}^2}{\text{ع}} - \text{ع} \right) \text{ حتاع}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ظا} = \left(\frac{\text{ط}^2}{\text{ع}} - \text{ع} \right) \text{ ظتاع} \\ \text{البرهان متروك للطالب} \end{array} \right.$$

ملحوظة (٣ - ٦)

في براهين القواعد من (١٠ - ٣) إلى (١٥ - ٣) اعتبرنا (٠ < ع < $\frac{\text{ط}}{\text{ع}}$) تسهلاً على الطالب . وإن هذه القواعد تبقى صحيحة مهما كانت قيمة ع ، وبالتالي فإن هذه القواعد هي متطابقات .

تدريب (٣ - ١٢)

(١) حاول أن تتذكر القيم الخاصة للدوال المثلثية التي تعلمتها في مقرر الصف الأول الثانوي ،

ثم أضف إليها ما تعلمته في البند (٣ - ٣) ثم أكمل الجدول التالي :

الدالة	٠	$\frac{\text{ط}}{\text{ع}} = ٢٠^\circ$	$\frac{\text{ط}}{\text{ع}} = ٤٠^\circ$	$\frac{\text{ط}}{\text{ع}} = ٦٠^\circ$	$\frac{\text{ط}}{\text{ع}} = ٩٠^\circ$	$\frac{\text{ط}}{\text{ع}} = ١٢٠^\circ$	$\frac{\text{ط}}{\text{ع}} = ١٥٠^\circ$	$\frac{\text{ط}}{\text{ع}} = ١٨٠^\circ$
حاه	٠	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	٠
حتاه	١	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	٠	١	٠
ظاه	٠	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	٠	٠	٠	غير معرف

(٢) أكتب قيمة كل من قا هـ ، قتا هـ ، ظتا هـ ، إذا كانت :

$$\begin{aligned} (پ) \quad \frac{ط}{٦} = هـ \quad (ب) \quad \frac{ط}{٤} = هـ \quad (ج) \quad \frac{ط}{٣} = هـ \\ (د) \quad \frac{ط^٢}{٣} = هـ \quad (هـ) \quad ط = هـ \quad (و) \quad هـ = ٢ ط \end{aligned}$$

(٣) أثبت صحة مايلي :

$$(پ) \quad \text{حا } ٩٠ \cdot \text{حا } ٣٠ = \text{ظا } ٤٥ \cdot \text{قتا } ٣٠ - \frac{٥}{٣}$$

$$(ب) \quad \text{قا } \frac{ط}{٣} \cdot \text{ظتا } \frac{ط}{٤} + ٤ \cdot \text{حتا } \frac{ط}{٣} \cdot \text{حا } \frac{ط}{٦} = ٢$$

مثال (٣-١٣) :

احسب : حا ع ، حتا ع ، ظاع ، إذا كان : (پ) ع = ٢٢٥ ، (ب) ع = ٣٣٠

الحل :

$$(پ) \quad \text{حا } (٢٢٥) = \text{حا } (١٨٠ + ٤٥) - \text{حا } ٤٥ \quad (\text{لماذا ؟})$$

$$\frac{\sqrt{٢}}{٢} =$$

$$\text{حتا } (٢٢٥) = \text{حتا } (١٨٠ + ٤٥)$$

$$- \text{حا } ٤٥ = - \frac{\sqrt{٢}}{٢}$$

$$\text{ظا } (٢٢٥) = \text{ظا } (١٨٠ + ٤٥) = \text{ظا } ٤٥ = ١$$

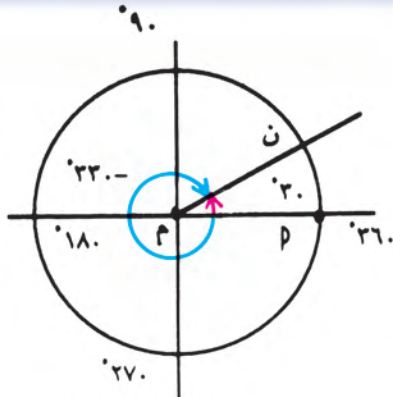
$$(ب) \quad \text{حا } (٣٣٠) = \text{حا } (٣٢٠ + ١٠) \quad \text{من القاعدة } (١٠ - ٣)$$

$$\text{حا } ١٠ = \frac{١}{٣}$$

$$\text{حتا } (٣٣٠) = \text{حتا } (٣٢٠ + ١٠) = \text{حتا } ١٠ = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$$

وبطريقة مشابهة أو بتطبيق المتطابقة ظا هـ = $\frac{\text{حا هـ}}{\text{حتا هـ}}$

$$\text{ظا } (٣٣٠) = \frac{١}{\frac{\sqrt{٢}}{٢}} = \frac{١}{٣}$$



شكل (٢٣-٣)

(لاحظ أن الزاويتين الموجهتين اللتين قياساهما 30° ، 330° لهما الضلع الابتدائي نفسه [م] والضلع النهائي نفسه [م ن كما في الشكل (٢٣-٣)] .

مثال (٣-١٤) :

إذا كانت $1 + 2$ حتا $h = 0$ ، $h > 0$ ، $h < 360^\circ$ فأوجد قيم h

الحل :

$$1 + 2 \text{ حتا } h = 0 \iff \text{حتا } h = -\frac{1}{2}$$

$$\iff \text{حتا } h = 60^\circ$$

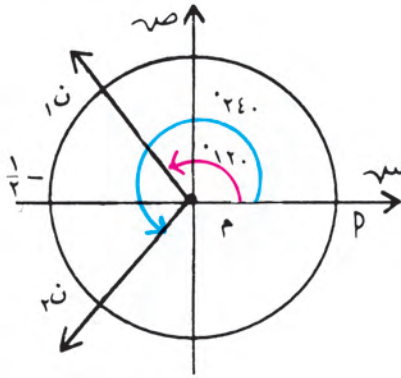
ومنه : $\text{حتا } h = \text{حتا } (60^\circ - 180^\circ)$ من القاعدة (٣-١١)

أو : $\text{حتا } h = \text{حتا } (60^\circ + 180^\circ)$ من القاعدة (٣-١٢)

$\iff h \in \{240^\circ, 120^\circ\}$ انظر الشكل (٣-٢٤)

فتكون مجموعة الحل : $\{240^\circ, 120^\circ\}$

تدريب (٣-١٣)



شكل (٢٤-٣)

(١) أكمل الجدول التالي :

ح	بالدرجة	120°	135°	210°	300°
ح	بالراديان				$\frac{7\pi}{4}$
ح	ح	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$			
ح	ح		$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$		
ح	ظ			$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	

(٢) بفرض $0 < h < 360$ أوجد قيم h فيما يلي :

(أ) $\frac{1}{2} = h$ (ب) $\frac{\sqrt{2}}{2} = h$

(ج) $2h = 360$ (د) $h = 360$

(هـ) $h = 2 + 360$

٣ - ٥ التمثيل البياني لدالتي الجيب وجيب التمام :

تعريف (٣-٩)

تسمى الدالة d المعرفة على \mathbb{R} بـ d دالة تورية دورها P ، إذا كان P أصغر عدد حقيقي موجب بحيث : $d(s) = d(s + P)$ لكل $s \in \mathbb{R}$

فلورجعنا إلى القاعدة (٣-١٠) لوجدنا أن :

$$d(s) = d(s + 2\pi) \text{ حتا}$$

حا $d(s) = d(s + \pi)$ حاس والدالتان حتا ، حا توريثان ووركلٍ منهما يساوي 2π ط

بينما الدالة ظا دورها π لأن :

$$d(s) = d(s + \pi) \text{ ظا}$$

القاعدة (٣-١٢)

مثال (٣-١٥) :

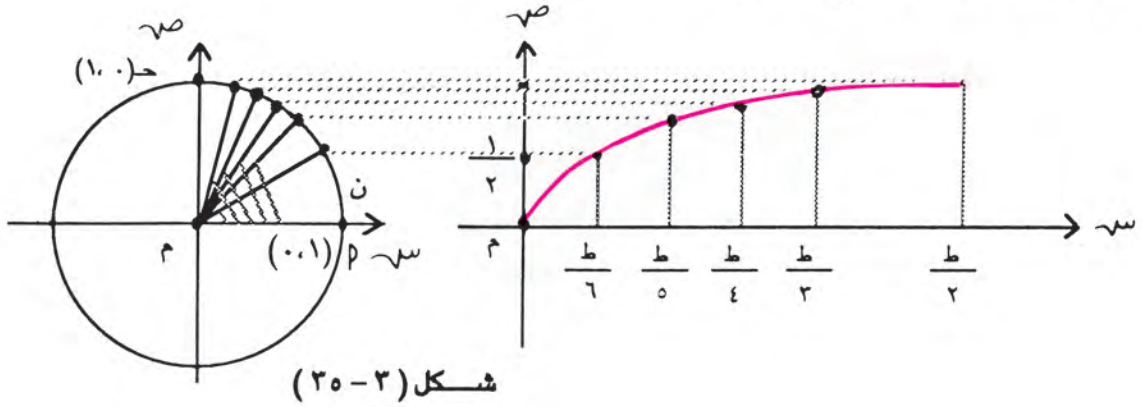
ارسم المنحنى الذي يمثل الدالة $v = \cos s$ حيث $0 < s < \frac{\pi}{2}$

الحل :

الجدول التالي يمثل نقاطاً من منحنى هذه الدالة خلال الفترة $[\frac{\pi}{2}, 0]$:

$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	٠	س
١	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.71$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.71$	$\frac{1}{2}$	٠	حاس

وقد مثلنا هذه النقط في الشكل (٣ - ٢٥)



شكل (٣-٢٥)

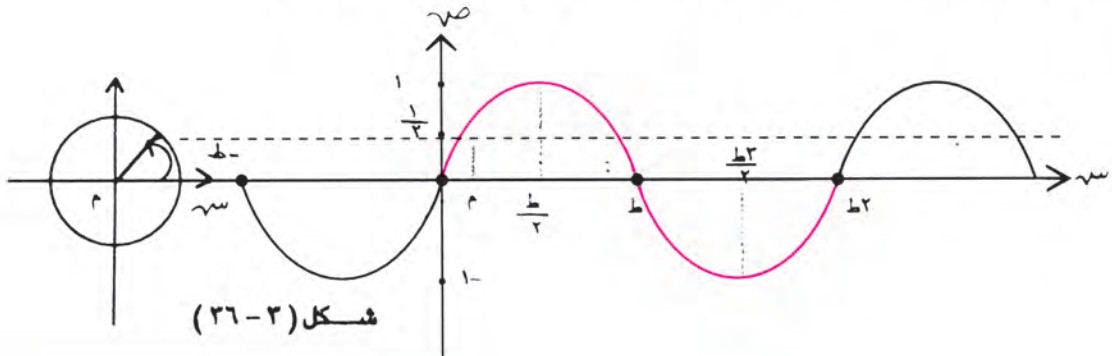
ولعلك تلاحظ أن قيمة حاس هي الإحداثي الصادي للنقطة ن على دائرة الوحدة ، وأن قيمتها تتزايد تدريجياً من (صفر) عندما س = صفرأ (أي عندما تنطبق ن على ٢) إل أن تصبح قيمتها مساوية ١ عندما س = $\frac{\pi}{2}$ (أي عندما تنطبق ن على ح) وبهذه الطريقة تستطيع إكمال رسم المنحنى خلال الفترة $0 \leq s \leq \frac{\pi}{2}$ وذلك برسم كل نقطة عليه على ارتفاع النقطة المناظرة لها على دائرة الوحدة .

مثال (٣ - ١٦) :

ارسم المنحنى الذي يمثل الدالة : ص = حاس ، س \in ح

الحل :

لو اتبعت أسلوب المثال (٣ - ١٥) لحصلت على الشكل (٣ - ٢٦)



شكل (٣-٢٦)

ولعلك تلاحظ أن المنحني يكرر نفسه والجزء المرسوم باللون الأحمر يمثل كون $s \in [0, 2\pi]$ وهي فترة تمثل دوراً واحداً ، وتحصل التغيرات نفسها في الفترات $[0, 2\pi]$ ، $[2\pi, 4\pi]$ ، ... وكذلك $[-\pi, \pi]$ ، $[\pi, 3\pi]$.

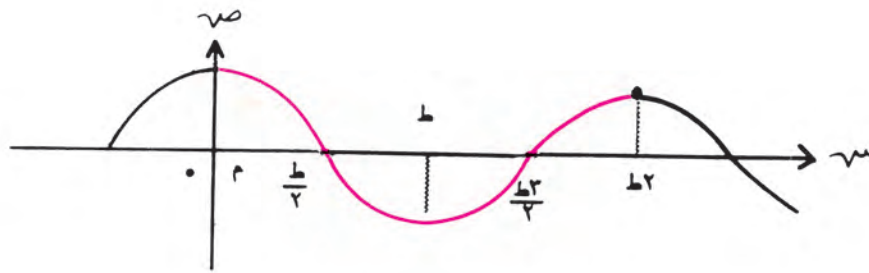
من جهة أخرى فإنك تلاحظ أن المنحني محصور بين المستقيمين $v = 1$ ، $v = -1$ وهذا يتفق مع ما سبق أن رأيت من قبل أن $-1 \leq \cos s \leq 1$

مثال (٣-١٧) :

ارسم منحني الدالة $v = \cos s$ ، $s \in \mathbb{R}$

الحل :

بالرجوع إلى دائرة الوحدة أو بالاعتماد على قيم s نتوصل إلى التمثيل البياني المطلوب كما في الشكل (٣-٢٧) .



شكل (٢-٢٧)

ملحوظة (٣-٧)

سبق أن علمنا أن $\cos s = \cos(s + \frac{\pi}{2})$ ، لذلك يمكننا رسم منحني الجيب أولاً ثم سحبه في الاتجاه السالب مسافة $\frac{\pi}{2}$ نحصل على منحني جيب التمام .

تمارين (٣ - ٣)

احسب كلاً من حاع ، حتاع ، ظاع ، ظتاع في الحالات التالية :

$$\begin{aligned} (١) \text{ ع} &= ٢٣٠^\circ & (٢) \text{ ع} &= \frac{\text{ط}٣}{٤} \text{ راديان} & (٣) \text{ ع} &= ٢١٠^\circ \\ (٤) \text{ ع} &= ٧٦٥^\circ & (٥) \text{ ع} &= ٤٢٠^\circ & (٦) \text{ ع} &= -٣٠٠^\circ \end{aligned}$$

أحسب :

$$(٧) \frac{\text{حتا} (٩٠^\circ - \text{هـ}) \text{ ظا} (٩٠^\circ - \text{هـ})}{\text{حتا} (-\text{هـ}) \text{ حا} (٩٠^\circ + \text{هـ}) \text{ ظتا} (-\text{هـ} - ٩٠^\circ)}$$

$$(٨) \frac{\text{ظتا} (\text{ط} - \text{هـ}) \text{ حا} (\text{ط} - \text{هـ}) \text{ حتا} (-\text{هـ})}{\text{حتا} (\text{ط} - \text{هـ}) \text{ طا} (\text{ط} + \text{هـ}) \text{ حتا} \text{هـ}}$$

أوجد قيم الدوال المثلثية الأخرى للزاوية التي قياسها هـ في كل من الحالات التالية :

$$(٩) \text{ حا} \text{هـ} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \quad ٠ < \text{هـ} < ٩٠^\circ$$

$$(١٠) \text{ حتا} \text{هـ} = -\frac{١}{٢} ، \quad ٩٠^\circ < \text{هـ} < ١٨٠^\circ$$

$$(١١) \text{ ظا} \text{هـ} = \frac{\sqrt{٣}}{٣} ، \quad -٩٠^\circ < \text{هـ} < -١٨٠^\circ$$

$$(١٢) \text{ ظتا} \text{هـ} = -\sqrt{٣} ، \quad -٩٠^\circ < \text{هـ} < ٠$$

(١٣) ارسم بالطريقة المتبعة في المثال (٣ - ١٥) المنحني البياني للدالة :

$$\text{ص} = \text{حتا} \text{س} ، \quad ٠ \geq \text{س} \geq \frac{\text{ط}}{٢}$$

(١٤) ارسم المنحني البياني للدالة :

$$\text{ص} = \text{حا} \text{س} ، \quad \text{س} \in [-\text{ط} ، \text{ط}]$$

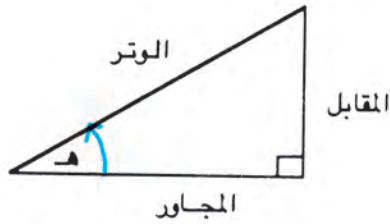
(١٥) ارسم المنحني البياني للدالة :

$$\text{ص} = \text{حتا} \text{س} ، \quad \text{س} \in [-\text{ط} ، \text{ط}]$$

٣ - ١ الدوال المثلثية للزاوية وتطبيقات حساب المثلثات :

(١) الدوال المثلثية للزاوية :

رأيت في مقرر الصف الأول الثانوي أن قيم الدوال المثلثية لزاوية حادة في مثلث قائم الزاوية قياسها هـ تحدد على النحو الآتي :



شكل (٢٨-٣)

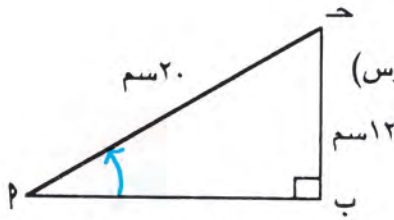
$$\begin{aligned} \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} &= \text{حاه} & \leftarrow & \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \text{قتاه} \\ \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} &= \text{حتاه} & \leftarrow & \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \text{قاه} \\ \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} &= \text{ظاه} & \leftarrow & \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \text{ظتاه} \end{aligned}$$

انظر الشكل (٢٨-٣)

مثال (١٨-٣) :

P ب ح مثلث قائم الزاوية في ب فيه |ح ا| = ٢٠ سم ، |ب ح| = ١٢ سم

أوجد قيم الدوال المثلثية لكل من زاويتي الحادتين .



شكل (٢٩-٣)

الحل : لاحظ أن : $(|ب ح|)^2 + (|ح ا|)^2 = (|ب ا|)^2$ (فيثاغورس)

$$256 = 2(12)^2 - 2(20)^2 =$$

$$|ب ا| = ١٦ \text{ سم} . \text{ شكل (٢٩-٣)}$$

$$\text{إذن : } \text{ح ا} = \frac{12}{16} = \text{قتا} = 0.75 , \text{ حتا} = \frac{16}{20} = 0.8 , \text{ ظا} = \frac{12}{16} = 0.75$$

$$\text{قتا} = \frac{20}{16} \approx 1.25 , \text{ قاه} = \frac{20}{16} = 1.25 , \text{ ظتاه} = \frac{16}{12} \approx 1.33$$

وحيث إن : $\text{ح} = 90^\circ - \text{ب}$ يكون :

$$\text{ح ا} = 0.8 , \text{ حتا} = 0.6 , \text{ ظا} \approx 1.33$$

$$\text{قتا} = 1.25 , \text{ قاه} \approx 1.67 , \text{ ظتاه} \approx 0.75$$

ملحوظة (٣ - ٨)

(١) لعلك تلاحظ أن الدوال المثلثية هي الدوال الدائرية التي سبق تعريفها مطبقة على قياسات زوايا مثلث .

أي أن : قيمة أي دالة مثلثية لزاوية قياسها هـ تساوي قيمة الدالة الدائرية التي قياسها هـ

(٢) توخياً للاختصار كتبنا : $\sin P$ ، $\cos P$ ، ... ، $\sin A$ ، $\cos A$ ، ... ،

بدلاً من : $\sin \hat{P}$ ، $\cos \hat{P}$ ، ... ، $\sin \hat{A}$ ، $\cos \hat{A}$ ، ... ،

نتيجة (٣ - ٤)

في المثلث P ب ح القائم في ب إذا فرضنا $|ب ح| = \hat{P}$ ، $|ب ب| = \hat{ب}$ ، $|ب ح| = \hat{ح}$ فإن :

$$(١) \sin P = \frac{\hat{ب}}{\hat{ب}} \iff \sin P = \hat{ب} \quad (٣ - ١٦)$$

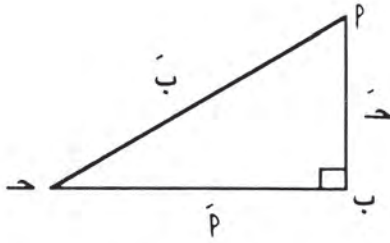
(أي أن : طول الضلع القائم = طول الوتر \times جيب الزاوية

المقابلة لذلك الضلع القائم) .

$$(٢) \cos P = \frac{\hat{ح}}{\hat{ب}} \iff \cos P = \hat{ح} \quad (٣ - ١٧)$$

(أي أن : طول الضلع القائم = طول الوتر \times جيب تمام

الزاوية المجاورة لذلك الضلع القائم) انظر الشكل (٣ - ٤٠) شكل (٣ - ٤٠)



تدريب (٣ - ١٤)

(١) ب ح مثلث قائم الزاوية في ب فيه $|ب ح| = ٢٠$ سم ، $|ب ح| = ١٢$ سم .

أوجد قيم الدوال المثلثية للزاوية P ، ثم استنتج من ذلك قيم الدوال المثلثية للزاوية جـ .

(٢) المثلث P ب ح قائم الزاوية في ب فيه $\hat{ح} = \frac{٨}{١٧}$ ، $|ب ح| = ٨٥$ سم ،

أوجد طول كلٍ من : $[ب P]$ ، $[ب ح]$.

(٣) P ، b ، c قياسات زوايا مثلث أي أن : $P + b + c = ط$

أثبت أن : $حا (P + b) = حا - ح$ ، $حبا (P + b) = - حتا - ح$ ، $طبا (P + b) = - طحا - ح$

ماذا يساوي كل من $حا - ح$ ، $حبا - ح$ ، $طبا - ح$ ، $حبا - ح$ ، $طبا - ح$ ، $حبا - ح$ ، $طبا - ح$ ؟ بدلالة $\frac{ح}{P}$ ؟

(٢) تطبيقات حساب المثلثات :

توصلنا في مقرر الصف الأول الثانوي إلى قيم الدوال المثلثية من أجل بعض القياسات الخاصة للزاوية مثل : 0° ، 30° ، 45° ، ...

كما رأينا أنه إذا لم تكن للزاوية إحدى هذه القياسات الشهيرة وكنا بحاجة إلى إيجاد قيم الجيب أو جيب التمام أو الظل لزاوية قياسها h ، حيث $0 < h < 90^\circ$ ، فإنه بإمكاننا استخدام جداول خاصة تدعى الجداول المثلثية ، وهي على أنواع : منها ما هو مقرب إلى ثلاثة أرقام عشرية ، ومنها ما هو مقرب إلى أربعة أرقام عشرية أو خمسة أرقام عشرية وقد تركنا للمعلم مهمة شرحها ، كما ألحقنا في نهاية ذلك المقرر تلك الجداول مقربة إلى أربعة أرقام عشرية .

وكما رأيت في البند (٣ - ١) ، فقد كان لعلمائنا نحن المسلمين الأثر الكبير في التوصل إلى القيم التي تتضمنها هذه الجداول ، تلك القيم التي أصبح من اليسير الحصول عليها من الآلة الحاسبة الألكترونية ، مما يجعلك تستطيع الاستغناء عن الجداول المثلثية ، إن كانت بين يديك آلة حاسبة تحتوي على قيم الدوال المثلثية .

وغني عن البيان أنه إذا لم تكن الزاوية واقعة بين الصفر و 90° فإن باستطاعتنا الاستفادة من إحدى القواعد التي مرت معنا لتبسيط قيم الدوال الدائرية في البند (٣ - ٤) ، ومن ثم نستفيد من الجداول المثلثية .

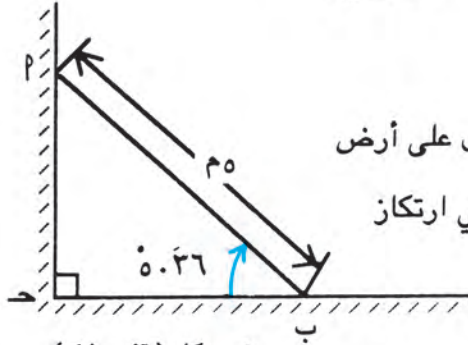
فلو طلب منا ، مثلاً ، إيجاد (حا ٢٥٣) ، فإننا نكتب :

$$حا ٢٥٣ = حا (٧٣ + ١٨٠)$$

$$= حا ٧٣ - القاعدة (٣ - ١٢)$$

$$= - ٩٥٦٣ . من الجداول$$

ولو أردت الاستعانة بالآلة الحاسبة فسوف تحصل مباشرة على : $\sin 253^\circ = -0,9563048$
وبالتقريب إلى أربعة أرقام عشرية تجد : $252^\circ = -0,9563$.



شكل (٣-٤١)

مثال (٣-١٩) :

سلم طوله ٥ أمتار يرتكز على جدار رأسي بحيث يميل على أرض أفقية بزاوية قياسها 0.46° . أوجد بعد كل من نقطتي ارتكاز السلم على الجدار والأرض عن خط تلاقيهما .

الحل :

في الشكل (٣-٤١) ، [P ب] يمثل السلم ، [ح ب] يمثل الأرض الأفقية ، [ح P] يمثل الجدار الرأسي ، $\widehat{ب ح أ} = 90^\circ$
في $\triangle أ ب ح$ نجد :

$|ح ب| = |ب P|$ حتا 0.46° وباستخدام الآلة الحاسبة ثم التقريب إلى رقمين عشريين نجد :

$$|ح ب| \approx 5 \times 0.6347305 = 3.1723625 \approx 3.17 \text{ م (لماذا ؟)}$$

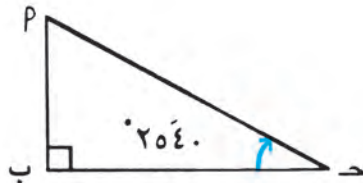
$$|ح P| = |ب P| \text{ حا } 0.46^\circ \text{ (لماذا ؟)}$$

$$\approx 5 \times 0.7727236 = 3.8636179 \approx 3.86 \text{ م}$$

مثال (٣-٢٠) :

إذا كان طول ظل نخلة رأسية على أرض أفقية يساوي ٣٥٦م عندما كانت زاوية ارتفاع الشمس 25.4° ، فما ارتفاع النخلة ؟

الحل :



شكل (٣-٤٢)

في الشكل (٣-٤٢) ، |ب P| يمثل ارتفاع النخلة ،

|ب ح| = ٣٥٦م (طول ظل النخلة على الأرض) .

في المثلث P ب ح ، $\frac{|ب P|}{|ب ح|} = \tan 25.4^\circ$ (لماذا ؟)

⇐ $|P| = |B \cdot C|$. ظا ح . وباستعمال الآلة الحاسبة والتقريب إلى رقمين عشريين نجد :

$$|P| = 256 \times 20 \approx 5120 \text{ ر.م.}$$

$$= 171.7622 \text{ م}$$

$$\approx 171 \text{ م}$$

تمارين (٣ - ٤)

(١) المثلث P ب ح قائم الزاوية في ب ، فيه الزاوية \hat{P} قياسها 60° ، نرسم [ب د] ارتفاعاً نازلاً على الوتر . فإذا كان $|P| = 8$ سم . فاحسب أطوال أضلاع المثلث P ب ح وطول الارتفاع [ب د] .

(٢) P ب ح مثلث قائم الزاوية في ب فيه $|P| = 5$ سم ، $|B \cdot C| = 12$ سم

أوجد قيمة كل من : (P) حا P ، حتا P ، ظا P ، (ب) حا ح ، حتا ح ، ظا ح

(٣) إذا كانت $180^\circ > S > 270^\circ$ وكان ظا س $= \frac{3}{4}$

فأوجد : ١٠ حتا س حتا ٦٠ - ٦ ظتا س حا 30°

(٤) (P) استخدم الآلة الحاسبة (أو الجداول المثلثية) لحساب :

$$\text{حتا } 47^\circ \text{ حتا } 13^\circ 25' - \text{حا } 47^\circ 34' \text{ حا } 13^\circ 25'$$

(ب) احسب حتا $(47^\circ 34' + 13^\circ 25')$ بدون استخدام الجداول

(ح) قارن بين النتيجتين في (P) ، (ب) .

(٥) P ب ح مثلث قائم الزاوية في ب فيه حا ح $= \frac{15}{17}$ ، $|P| = 30$ سم .

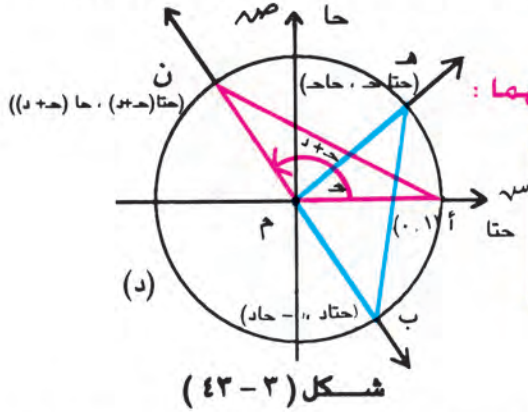
أوجد : (P) طول كل من [ب ح] ، [ح P]

(ب) قا P ، قتا P ، ظتا P .

(٦) منذنة طول ظلها على أرض أفقية 20 م عندما كانت زاوية ارتفاع الشمس $35^\circ 6'$

أوجد ارتفاع المنذنة .

(٧) سلم يرتكز على جدار رأسي وأرض أفقية ، فإذا كان طوله ١٢ قدماً ويبعد طرفه المرتكز على الأرض عن خط تلاقي الأرض والجدار مسافة ٧٫٣ قدم ، فأوجد كلاً من الزاويتين اللتين يصنعهما السلم مع الأرض والجدار ، ثم أوجد بعد نقطة استناده على الجدار عن خط تلاقي الجدار والأرض .



٣- ٧ الدوال الدائرية لمجموع زاويتين أو الفرق بينهما :

نظرية (٣ - ٧)
لكل زاويتين قياساهما ح ، د فإن :
حتا (ح + د) = حتا ح - حتا د

البرهان

في الشكل (٣-٤٢) الدائرة (د) دائرة الوحدة والزاويا التي قياساتها ح ، - د ، (ح + د) كل

منها في وضع قياسي حيث : ق (> م ن) = ح + د ← ن حتا (ح + د) ، حتا (ح + د) (

ق (> م هـ) = ح ← هـ حتا (ح ، حتا د) ، ق (> م ب) = - د ←

← ب حتا (د -) ، حتا (د -) = ب حتا (حتا د ، - حتا د) (لماذا ؟)

الوتران [ن] ، [ب هـ] متطابقان (لماذا ؟)

← | ن | = | ب هـ | وبتطبيق قانون المسافة بين نقطتين :

← حتا (حتا (ح + د) - ١) + حتا (حتا (ح + د) - ١) = حتا (حتا (ح + د) - ١) + حتا (حتا (ح + د) - ١)

← حتا (حتا (ح + د) - ١) + حتا (حتا (ح + د) - ١) = حتا (حتا (ح + د) - ١) + حتا (حتا (ح + د) - ١)

= حتا (حتا (ح + د) - ١) + حتا (حتا (ح + د) - ١) + حتا (حتا (ح + د) - ١) + حتا (حتا (ح + د) - ١)

← حتا (حتا (ح + د) - ١) + حتا (حتا (ح + د) - ١) = حتا (حتا (ح + د) - ١) + حتا (حتا (ح + د) - ١)

حتا (حتا (ح + د) - ١) + حتا (حتا (ح + د) - ١) = حتا (حتا (ح + د) - ١) + حتا (حتا (ح + د) - ١)

← حتا (حتا (ح + د) - ١) + حتا (حتا (ح + د) - ١) = حتا (حتا (ح + د) - ١) + حتا (حتا (ح + د) - ١)

← حتا (حتا (ح + د) - ١) = حتا (حتا (ح + د) - ١) (٣ - ١٨)

مثال (٢١-٣) :

أوجد بدون استخدام الجداول أو الآلة الحاسبة حتا $^{\circ}١٠٥$

الحل :

$$\text{حتا } (^{\circ}١٠٥) = \text{حتا } (^{\circ}٤٥ + ^{\circ}٦٠)$$

$$\begin{aligned} &= \text{حتا } ^{\circ}٦٠ \cdot \text{حتا } ^{\circ}٤٥ - \text{حتا } ^{\circ}٤٥ \cdot \text{حتا } ^{\circ}٦٠ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{3} - 1)}{4} \end{aligned}$$

نظرية (٣-٨)

لكل زاويتين قياساهما d ، فإن

$$\text{حتا } (d - d) = \text{حتا } d \cdot \text{حتا } d + \text{حتا } d \cdot \text{حتا } d \quad (٢-١٩)$$

البرهان

إن القانون (٣-١٨) متطابقة محققة لكل زاويتين ، ولهذا نستطيع أن نضع (- d)

مكان (d) فيصبح :

$$\text{حتا } (d - d) = \text{حتا } d \cdot \text{حتا } (-d) - \text{حتا } (-d) \cdot \text{حتا } d$$

$$\Leftarrow \text{حتا } (d - d) = \text{حتا } d \cdot \text{حتا } d + \text{حتا } d \cdot \text{حتا } d \quad (\text{لماذا ؟})$$

مثال (٢٢-٣) :

أوجد حتا $^{\circ}١٥$ بدون استخدام الجداول أو الآلة الحاسبة .

الحل :

$$\text{حتا } (^{\circ}١٥) = \text{حتا } (^{\circ}٤٥ - ^{\circ}٦٠)$$

$$\begin{aligned} &= \text{حتا } ^{\circ}٤٥ \cdot \text{حتا } ^{\circ}٦٠ - \text{حتا } ^{\circ}٦٠ \cdot \text{حتا } ^{\circ}٤٥ \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{3} - 1)}{4} \end{aligned}$$

نظرية (٢ - ٩)

لكل زاويتين قياسهما α ، β فإن :

$$\text{ح } (\alpha + \beta) = \text{ح } \alpha \text{ ح } \beta + \text{حتا } \alpha \text{ ح } \beta$$

البرهان

$$\text{ح } (\alpha + \beta) = \text{ح } \alpha \text{ ح } \beta + \text{حتا } \alpha \text{ ح } \beta \quad (\text{لماذا ؟})$$

$$= \text{ح } \alpha \left(\text{ح } \beta + \frac{\text{حتا } \beta}{\text{ح } \beta} \right) \quad (\text{لماذا ؟})$$

$$= \text{ح } \alpha \text{ ح } \beta + \text{ح } \alpha \frac{\text{حتا } \beta}{\text{ح } \beta} \quad (\text{لماذا ؟})$$

$$\leftarrow \text{ح } (\alpha + \beta) = \text{ح } \alpha \text{ ح } \beta + \text{حتا } \alpha \text{ ح } \beta \quad (٢٠ - ٣)$$

نظرية (٣ - ١٠)

لكل زاويتين قياسهما α ، β فإن :

$$\text{ح } (\alpha - \beta) = \text{ح } \alpha \text{ ح } \beta - \text{حتا } \alpha \text{ ح } \beta \quad (٢١ - ٣)$$

(البرهان متروك للطالب)

نتيجة (٣ - ٥)

من المتطابقتين (٢٠ - ٣) ، (١٨ - ٣) نجد :

$$\frac{\text{ح } \alpha \text{ ح } \beta + \text{حتا } \alpha \text{ ح } \beta}{\text{ح } \alpha \text{ ح } \beta - \text{حتا } \alpha \text{ ح } \beta} = \frac{\text{ح } (\alpha + \beta)}{\text{ح } (\alpha - \beta)}$$

وبقسمة كل من البسط والمقام على $\text{ح } \alpha \text{ ح } \beta$ نجد :

$$\frac{\text{ح } \alpha \text{ ح } \beta + \text{حتا } \alpha \text{ ح } \beta}{\text{ح } \alpha \text{ ح } \beta - \text{حتا } \alpha \text{ ح } \beta} = \frac{\text{ح } (\alpha + \beta)}{\text{ح } (\alpha - \beta)} \quad (٢٢ - ٣)$$

$$\frac{\text{ح } \alpha \text{ ح } \beta - \text{حتا } \alpha \text{ ح } \beta}{\text{ح } \alpha \text{ ح } \beta + \text{حتا } \alpha \text{ ح } \beta} = \frac{\text{ح } (\alpha - \beta)}{\text{ح } (\alpha + \beta)} \quad (٢٣ - ٣)$$

نتيجة (٣ - ٦)

(البرهان متروك للطالب)

مثال (٢٣-٣) :

أوجد قيمة المقدار .

بدون استخدام الجداول ولا الآلة الحاسبة

$$\frac{\text{ظا } ٧٥ - \text{ظا } ١٥}{١ + \text{ظا } ٧٥ \text{ ظا } ١٥}$$

المتطابقة (٢٣ - ٣)

$$\text{ظا } (٧٥ - ١٥) = \frac{\text{ظا } ٧٥ - \text{ظا } ١٥}{١ + \text{ظا } ٧٥ \text{ ظا } ١٥}$$

$$\text{ظا } ٦٠ =$$

الحل :

$$\sqrt{٣٧} =$$

مثال (٢٤-٣) :

إذا كانت $\frac{٥}{١٢} = \text{ظاه}$ ، $١٨٠ > \text{هـ} > ٢٧٠$ ، $\frac{٨}{١٧} = \text{حاي}$ ، $٩٠ > \text{ي} > ١٨٠$

فأوجد قيمة كلٍ من حاه ، حتاه ، ظاه ، $\text{حاه} + \text{هـ}$ ، $\text{حاه} - \text{هـ}$ ، $\text{حاه} + \text{ي}$ ، $\text{حاه} - \text{ي}$

الحل :

تعلم أن : $\text{حاه} + \text{هـ} = \text{حاه} + \text{حتاه} + \text{حاي}$ (١) (لماذا ؟)

فلنحسب إذن كلاً من حاه ، حتاه ، حاي

من المتطابقة : $\frac{١}{\text{حتاه}^٢} = \text{ظاه}^٢ + ١$ (٢-٨)

نجد : $\frac{١}{\text{حتاه}^٢} = ٢ \left(\frac{٥}{١٢} \right)^٢ + ١$

⇐ $\text{حتاه} = - \frac{١٢}{١٣}$ (لماذا اخترنا الحل السالب ؟)

وبما أن $\frac{\text{حاه}}{\text{حتاه}} = \text{ظاه}$ فإن $\text{حاه} = \text{ظاه} \times \text{حتاه} = \frac{٥}{١٢} \times - \frac{١٢}{١٣} = - \frac{٥}{١٣}$

ومن المتطابقة : $١ = \text{حاي} + \text{حتاه}^٢$ (٣-٤)

نجد : $١ = \text{حاي} + ٢ \left(\frac{٨}{١٧} \right)^٢$

← حتاي -- = $\frac{15}{17}$ (لماذا اخترنا الحل السالب ؟)

$$\frac{8}{17} \times \left(\frac{12}{13} - \right) + \left(\frac{15}{17} - \right) \times \left(\frac{5}{13} - \right) = (هـ + حى) =$$

$$\frac{21}{221} - =$$

كذلك : حتا (هـ - حى) = حتا هـ حتا حى + حا هـ حا حى (المتطابقة ٢ - ١٩)

$$\left(\frac{8}{17} - \right) \times \left(\frac{5}{13} - \right) + \left(\frac{15}{17} - \right) \times \left(\frac{12}{13} - \right) =$$

$$= \frac{140}{221}$$

(المتطابقة ٣ - ٢٢) ، $\frac{\text{ظاه} + \text{ظاي}}{\text{ظاه} \times \text{ظاي} - 1} = \text{طا (هـ + حى)}$

$$\frac{5}{12} = \text{ظاه}$$

$$\frac{8}{15} - = -\frac{\frac{8}{17}}{\frac{15}{17}} = \frac{\text{حاي}}{\text{حتاي}} = \text{ظاي}$$

$$\frac{21}{220} - = \frac{\left(\frac{8}{15} - \right) + \frac{5}{12}}{\left(\frac{8}{15} - \right) \left(\frac{15}{12} - \right) - 1} = \text{طا (هـ + حى)} \quad \text{إذن :}$$

تدريب (٣ - ١٥)

(١) أوجد قيمة كل مما يأتي دون استخدام الجداول أو الآلة الحاسبة .

$$\text{حا } 10.5 \text{ حا } 15 - \text{حتا } 10.5 \text{ حتا } 15, \text{ حا } 13.5 \text{ حا } 15 - \text{حتا } 13.5 \text{ حا } 15$$

$$\frac{1 + \text{طا } 134 \text{ طا } 14}{\text{طا } 134 - \text{طا } 14}$$

(٢) مانوع المثلث الذي تحقق قياسات زواياه العلاقة :

$$\text{حا } p \text{ حتا } p = \text{حا } p \text{ حا } p$$

$$(٣) \text{ أثبت أن : حا } (د + د) . \text{ حا } (د - د) = \text{حا } د - \text{حا } د$$

$$(٤) \text{ أثبت أن : حتا } (د + د) . \text{ حتا } (د - د) = \text{حتا } د + \text{حتا } د - 1$$

تمارين (٣ - ٥)

(١) أوجد بدون استخدام الجداول والآلة الحاسبة مايلي :

$$(پ) \text{ حا } ١٥ \quad (ب) \text{ ظا } ١٠٥ \quad (ح) \text{ حا } ٢٨٥$$

$$(د) \text{ حا } ٤٠ \text{ حتا } ٢٠ + \text{ حتا } ٤٠ \text{ حا } ٢٠ \quad (هـ) \text{ حتا } ٧٥ \text{ حتا } ١٥ + \text{ حا } ٧٥ \text{ حا } ١٥$$

$$(و) \frac{\text{ظا } ٤٠ - \text{طا } ١٠}{\text{طا } ٤٠ \times \text{طا } ١٠} \quad (ز) \frac{١ - \text{طا } ٥٠}{\text{طا } ١٠ + \text{ظا } ١٠}$$

(٢) إذا كان ظاه = $\frac{٤}{٣}$ ، $٩٠ > هـ > ١٨٠$ ، حا = $\frac{٣}{٥}$ بحيث تقع ي في الربع الثالث ،

فأوجد قيمة كل من : حا (هـ + ي) ، حتا (هـ - ي) ، ظتا (هـ + ي) .

(٣) باستعمال متطابقات المجموع أثبت أن :

$$(پ) \text{ حا } \left(\frac{\text{ط}}{٤} + \text{هـ} \right) = \text{حتا هـ} \quad (ب) \text{ حتا } \left(\frac{\text{ط}}{٤} - \text{هـ} \right) = - \text{حا هـ}$$

$$(ح) \text{ ظا } (\text{ط} + \text{هـ}) = \text{ظا هـ} \quad (د) \text{ حتا } (\text{ط} - \text{هـ}) = - \text{حتا هـ}$$

(٤) بفرض حا س = $\frac{٧}{٥}$ ، س تقع في الربع الثاني ، حتا ص = $\frac{٣}{٥}$ ، ص تقع في الربع الرابع ،

أوجد قيمة كل من :

حا (س + ص) ، حا (س - ص) ، حتا (س - ص) ، حتا (س + ص) .

(٥) إذا كان ظاه = $\frac{١}{٣}$ ، $٩٠ > هـ > ٠$ ، حا = $\frac{٢}{٣}$ حيث ي تقع في الربع الثاني ،

أوجد قيمة كل من :

ظا (هـ + ي) ، ظا (هـ - ي) .

(٦) استخدم المتطابقات التي حصلت عليها في البند (٣ - ٧) لإيجاد ناتج كل مما يلي :

$$(پ) \text{ حا } (هـ + ي) + \text{ حا } (هـ - ي)$$

$$(ب) \text{ حا } (هـ + ي) - \text{ حا } (هـ - ي)$$

$$(ح) \text{ حتا } (هـ + ي) + \text{ حتا } (هـ - ي)$$

$$(د) \text{ حتا } (هـ - ي) - \text{ حتا } (هـ + ي)$$

(٧) بفرض p, b, d زوايا مثلث أي أن $p + b + d = \pi$ ، $p \neq 0$ ، $b \neq 0$ ، $d \neq 0$ ،

وإذا كان $\frac{p}{\text{حاج}} = 2 \text{ حتا}$ ، فأثبت أن $b = d$

(٨) برهن على صحة النظرية (٣ - ١٠) (٩) برهن على صحة النتيجة (٣ - ٦)

٣ - ٨ الدوال الدائرية لمضاعفات الزوايا :

سنبحث في هذا البند عن صيغ مثلثية لكل من الدوال :

حاج^٢ ، حتاج^٢ ، ظاج^٢ ، ثم نستنتج صيغ كل من الدوال : حاج^٣ ، حتاج^٣ ، ظاج^٣ ،

$$(١) \text{ حاج}^2 = \text{حاج} (\text{حاج} + \text{حاج})$$

من المتطابقة (٣ - ٢٠)

$$= \text{حاج} \text{ حتاج} + \text{حاج} \text{ حتاج}$$

(٣ - ٢٤)

$$\boxed{\text{حاج}^2 = 2 \text{ حاج} \text{ حتاج}} \quad \Leftarrow$$

$$(٢) \text{ حتاج}^2 = \text{حتاج} (\text{حاج} + \text{حاج})$$

من المتطابقة (٣ - ١٨)

$$= \text{حتاج} \text{ حتاج} - \text{حاج} \text{ حاج}$$

(٣ - ٢٥)

$$\boxed{\text{حتاج}^2 = \text{حتاج}^2 - \text{حاج}^2} \quad \Leftarrow$$

نتيجة (٣ - ٧)

بما أن : حتاج^٢ + حاج^٢ = ١ ، فمن المتطابقة (٣ - ٢٥) نجد أن :

(٣ - ٢٦)

$$\boxed{\text{حتاج}^2 = 2 \text{ حتاج}^2 - 1}$$

وأن :

(٣ - ٢٧)

$$\boxed{\text{حتاج}^2 = 1 - 2 \text{ حاج}^2}$$

ومن المتطابقتين (٣ - ٢٦) ، (٣ - ٢٧) ينتج أن :

(٣ - ٢٨)

$$\boxed{\frac{\text{حتاج}^2 + 1}{2} = \text{حتاج}^2}$$

(٣ - ٢٩)

$$\boxed{\frac{\text{حاج}^2 - 1}{2} = \text{حاج}^2}$$

$$(3) \quad \text{ظا}^2 \text{ح} = \text{ظا}(\text{ح} + \text{ح})$$

$$\frac{\text{ظا}^2 \text{ح} + \text{ظا}^2 \text{ح}}{\text{ظا}^2 \text{ح} - 1} =$$

$$(20 - 2)$$

$$\boxed{\frac{\text{ظا}^2 \text{ح}}{\text{ظا}^2 \text{ح} - 1} = \text{ظا}^2 \text{ح}} \quad \leftarrow$$

$$(24 - 2) \quad (4) \quad \text{إذا لا حظنا أن : } \text{ح} = 2 \times \frac{\text{ح}}{2} \quad \text{فإن بإمكاننا كتابة المتطابقات بين}$$

إلى (29 - 2) على الترتيب :

$$(24 - 2)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \text{ح}^2 - 1 &= \text{ح}^2 - 1 \\ \frac{\text{ح}^2 - 1}{2} &= \frac{\text{ح}^2 - 1}{2} \end{aligned}}$$

$$(21 - 2)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \text{ح}^2 - 1 &= \text{ح}^2 - 1 \\ \frac{\text{ح}^2 - 1}{2} &= \frac{\text{ح}^2 - 1}{2} \end{aligned}}$$

$$(25 - 2)$$

$$\boxed{\frac{\text{ح}^2 + 1}{2} = \frac{\text{ح}^2 + 1}{2}}$$

$$(22 - 2)$$

$$\boxed{\frac{\text{ح}^2 - 1}{2} = \frac{\text{ح}^2 - 1}{2}}$$

$$(26 - 2)$$

$$\boxed{\frac{\text{ح}^2 - 1}{2} = \frac{\text{ح}^2 - 1}{2}}$$

$$(23 - 2)$$

$$\boxed{1 - \frac{\text{ح}^2}{2} = 1 - \frac{\text{ح}^2}{2}}$$

(5) نترك للطالب أن يستنتج من المتطابقتين (28 - 2) ، (29 - 2)

$$(27 - 2)$$

$$\boxed{\frac{\text{ح}^2 - 1}{\text{ح}^2 + 1} = \frac{\text{ح}^2 - 1}{\text{ح}^2 + 1}}$$

ومن المتطابقتين (25 - 2) ، (26 - 2)

$$(28 - 2)$$

$$\boxed{\frac{\text{ح}^2 - 1}{\text{ح}^2 + 1} = \frac{\text{ح}^2 - 1}{\text{ح}^2 + 1}}$$

(6) وأخيراً ، نترك للطالب أن يستنتج انطلاقاً من المتطابقات (20 - 2) ، (21 - 2) ، (22 - 2)

قيم ظا ح ، حاد ح ، حتا ح بدلالة ظا ح فيحصل على :

$$(29 - 2)$$

$$\frac{\text{ظا}^2 \text{ح}}{2} = \frac{\text{ظا}^2 \text{ح}}{2}$$

$$(40 - 2)$$

$$\frac{\text{ح}^2}{2} = \frac{\text{ح}^2}{2}$$

$$(41 - 2)$$

$$\frac{\text{ح}^2 - 1}{2} = \frac{\text{ح}^2 - 1}{2}$$

(للحصول على (٣ - ٣٩) انطلق من المتطابقة (٣ - ٣٠)، وللحصول على (٣ - ٤٠)، (٣ - ٤١) ضع مقاماً للطرف الأيسر في كلٍ من (٣ - ٣١)، (٣ - ٣٢) هو (حتا^٢ حاه^٢ + حاه^٢ حاه^٢ = ١) ثم اقسّم البسط والمقام في كلٍ منهما على حتا^٢ حاه^٢، وغني عن البيان أن إيجاد المتطابقات الثلاث الأخيرة غير ممكن إلا إذا كانت $\frac{حاه}{حاه} \neq \frac{س : س}{س : س} = \frac{ط}{ط} + م ، م \Rightarrow ص$ يضاف إلى ذلك بالنسبة للمتطابقة (٣ - ٣٩) كون: $\frac{حاه}{حاه} \neq \frac{س : س}{س : س} = \frac{ط}{ط} + م ، م \Rightarrow ص$

مثال (٣ - ٢٥):

إذا كانت حاه = $\frac{٢}{٥}$ ، $٠ < ه < \frac{ط}{٢}$ فأوجد قيمة كلٍ من:
 حاه^٢ه، حاه^٢ه، طاه^٢ه، حاه^٢ه، حاه^٢ه

الحل:

(لماذا؟)

$$\frac{٤}{٥} = \frac{حاه}{حاه} = ٢ حاه حاه، حيث حاه = \frac{٤}{٥}$$

$$\frac{٢٤}{٢٥} = \frac{٤}{٥} \times \frac{٢}{٥} \times ٢ =$$

$$\frac{حاه}{حاه} = \frac{حاه}{حاه} - حاه$$

$$\frac{٧}{٢٥} = \frac{٩}{٢٥} - \frac{١٦}{٢٥} =$$

$$\frac{٢٤}{٧} = \frac{حاه}{حاه} = طاه$$

$$\frac{١}{١٠} = \frac{\frac{٤}{٥} - ١}{٢} = \frac{حاه - ١}{٢} = \frac{حاه}{٢}$$

(علل لماذا اخترنا الحل الموجب)

$$\frac{١}{١٠} = \frac{حاه}{٢}$$

$$\frac{٩}{١٠} = \frac{\frac{٤}{٥} + ١}{٢} = \frac{حاه + ١}{٢} = \frac{حاه}{٢}$$

$$\frac{٢}{١٠} = \frac{حاه}{٢}$$

مثال (٢٦-٣) :

أوجد قيمة ظا ٢٢٢٠.

الحل :

$$\text{بوضع } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2220}{\sqrt{3}} \iff \text{ح} = 45 \quad \text{وبما أن } \tan^2 \theta = \frac{1}{3} \implies \frac{1 - \cot \theta}{1 + \cot \theta} = \frac{1}{3}$$

$$\text{إذاً } \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 = \frac{2220 - 1}{2220 + 1} \implies \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{2220 - 1}{2220 + 1}$$

$$\text{(لماذا ؟)} \quad \sqrt{1 - 2\sqrt{3}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\text{(علل إهمالنا الجذر السالب)} \quad 1 - \sqrt{3} = 2220 \implies \text{ظا } 2220 = 1 - \sqrt{3}$$

مثال (٢٧-٣) :

$$\text{أثبت صحة المتطابقة : } \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} = \frac{\cot \theta - 1}{\cot \theta + 1}$$

الحل :

$$\text{(لماذا ؟)} \quad \frac{\cot \theta - 1}{\cot \theta + 1} = \frac{\cot \theta - 1}{\cot \theta + 1} = \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta}$$

$$\text{(لماذا ؟)} \quad \frac{(\cot \theta + 1)(\cot \theta - 1)}{(\cot \theta + 1)^2} = \frac{\cot^2 \theta - 1}{(\cot \theta + 1)^2}$$

$$\text{وبقسمة كل من البسط والمقام على } \cot \theta \implies \frac{\cot \theta - 1}{\cot \theta + 1} = \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta}$$

$$\text{الطرف الأيسر} = \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta}$$

مثال (٢٨ - ٣) :

اكتب حا ٢ س بدلالة حاس .

الحل :

$$\text{حا } ٢ \text{ س} = \text{حا} (٢ \text{ س} + \text{س})$$

$$= \text{حا } ٢ \text{ س} + \text{حا} \text{ س}$$

$$٢ \text{ حاس} + \text{حا} \text{ س} = (١ - ٢ \text{ حاس}) + (٢ \text{ حاس}) \text{ (لماذا ؟)}$$

$$= ٢ \text{ حاس} (١ - ٢ \text{ حاس}) + (٢ - ١) \text{ حاس}$$

$$= \text{حاس} (٢ - ٢ + ٢ - ١) \text{ حاس}$$

$$= \text{حاس} (٤ - ٣) .$$

تدريب (١٦ - ٣)

(١) في المثال (٢٧ - ٣) ابحث عن الشروط التي تجعل كلاً من طرفي المتطابقة معرّفًا والمتطابقة صحيحة .

(٢) اعتمد الأسلوب المتبع في حل المثال (٢٨ - ٣) لإيجاد قانون حتا ٢ س بدلالة حتا س .

(٣) اعتمد الأسلوب نفسه لإيجاد طا ٢ س بدلالة طاس ، أوضح أن القانون الناتج لا يستخدم

$$\text{إلا ضمن شرطين يردآن الى الشرط : س} \neq \frac{\text{ط}}{٦} + \text{ك} \frac{\text{ط}}{٣} , \text{ك} \in \mathbb{R}$$

تمارين (٦ - ٣)

(١) إذا كانت طاه = $-\frac{٢}{٤}$ ، $١٨٠ > ه > ٢٧٠$ ، فأوجد قيمة كل من :

$$\text{حا } ٢ ه , \text{حا} ٢ ه , \text{ظا } ٢ ه , \text{حا} \frac{ه}{٣} , \text{حا} \frac{ه}{٣} .$$

(٢) إذا كانت حتا ه = $\frac{١٢}{١٣}$ ، حيث $٩٠ > ه > ١٨٠$ ، فأوجد قيمة كل من :

$$\text{حا } ه , \text{حا} ٢ ه , \text{حا} ٢ ه .$$

(٣) في التمرين (٢) أوجد قيمة كل من : $\text{حا} \frac{ه}{٣}$ ، $\text{حا} \frac{ه}{٣}$ ، $\text{ظا} \frac{ه}{٣}$

$$(٤) \text{ برهن أن : } \frac{\text{ح}^٢\text{ا}}{\text{ح}^٢\text{ا}} - \frac{\text{ح}^٢\text{ا}}{\text{ح}^٢\text{ا}} = ٢ \quad (هـ \neq \text{ك} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ك}} \text{ ، } \exists \text{ص})$$

$$(٥) \text{ برهن أن : } \text{ظ}^٢\text{ا} - \text{ظ}^٢\text{ا} = ٢ \text{ ظ}^٢\text{ا} \quad (هـ \neq \text{ك} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ك}} \text{ ، } \exists \text{ص})$$

(٦) بدون استخدام الجداول أو الآلة الحاسبة أوجد قيم كل مما يلي :

$$(٢) \quad ٢ \text{ ح}^٢\text{ا} \cdot ٧٥ \text{ ح}^٢\text{ا} \quad (ب) \quad ١ - ٢ \text{ ح}^٢\text{ا} \cdot ١٥ \quad (د) \quad ٢ \text{ ح}^٢\text{ا} \cdot ٢٢٢٠ - ١$$

$$(د) \quad \frac{١ - \text{ظ}^٢\text{ا}}{\text{ح}^٢\text{ا}} \quad (هـ) \quad \frac{\text{ظ}^٢\text{ا}}{\text{ح}^٢\text{ا}} - ١ \quad (و) \quad \text{ح}^٢\text{ا} \cdot ٧٥ - \text{ح}^٢\text{ا} \cdot ٧٥$$

في التمارين من (٧) إلى (١٠) أثبت صحة المتطابقات (دون مناقشة شروط التطبيق)

$$(٧) \quad (\text{ح}^٢\text{ا} \pm \text{ح}^٢\text{ا}) = ١ \pm \text{ح}^٢\text{ا}$$

$$(٨) \quad \text{ح}^٢\text{ا} - \text{ح}^٢\text{ا} = \text{ح}^٢\text{ا}$$

$$(٩) \quad \frac{\text{ح}^٢\text{ا} \pm \text{ح}^٢\text{ا}}{\text{ح}^٢\text{ا}} = \text{ظ}^٢\text{ا} \pm \text{ظ}^٢\text{ا}$$

$$(١٠) \quad ١ - \text{ظ}^٢\text{ا} = \frac{\text{ظ}^٢\text{ا}}{\text{ظ}^٢\text{ا}}$$

$$(١١) \quad \text{برهن أن ح}^٢\text{ا} = ٨ \text{ ح}^٢\text{ا} - \text{ح}^٢\text{ا} \text{ ح}^٢\text{ا} \text{ ح}^٢\text{ا} \text{ ح}^٢\text{ا}$$

$$(١٢) \quad \text{برهن أن ح}^٢\text{ا} = ٨ \text{ ح}^٢\text{ا} - ٨ \text{ ح}^٢\text{ا} + ١$$

٣ - ٩ قوانين التحويل :

نحتاج أحياناً إلى تحويل مجموع نسبتين مثلثتين (أو الفرق بينهما) إلى حاصل ضرب نسبتين مثلثتين وبالعكس ، وسوف نستنتج في هذا البند مجموعة قوانين (أي متطابقات) تساعدنا على ذلك التحويل .

أولاً

$$\text{نعلم أن : } \text{ح}^٢\text{ا} (\text{د} + \text{د}) = \text{ح}^٢\text{ا} \text{ ح}^٢\text{ا} + \text{ح}^٢\text{ا} \text{ ح}^٢\text{ا} \quad (٣ - ٢٠)$$

$$\text{ح}^٢\text{ا} (\text{د} - \text{د}) = \text{ح}^٢\text{ا} \text{ ح}^٢\text{ا} - \text{ح}^٢\text{ا} \text{ ح}^٢\text{ا} \quad (٣ - ٢١)$$

(٢٠ - ٣) ، (٢١ - ٣) يعطيان بالجمع :

$$\text{حا (د + د) + حا (د - د) = ٢ حا د}$$

كما يعطيان بالطرح :

$$\text{حا (د + د) - حا (د - د) = ٢ حا د}$$

اتبع الأسلوب نفسه لاستنتاج حا (د + د) + حا (د - د)

$$\text{حا (د + د) - حا (د - د)}$$

ستحصل بذلك على المجموعة الأولى من قوانين التحويل :

$$\text{حا (د + د) + حا (د - د) = ٢ حا د (٤٢ - ٣)}$$

$$\text{حا (د + د) - حا (د - د) = ٢ حا د (٤٣ - ٣)}$$

$$\text{حا (د + د) + حا (د - د) = ٢ حا د (٤٤ - ٣)}$$

$$\text{حا (د + د) - حا (د - د) = ٢ حا د (٤٥ - ٣)}$$

ولعلك تلاحظ أن القانون (٤٥ - ٣) - الأخير - يكتب أيضاً :

$$\text{حا (د - د) - حا (د + د) = ٢ حا د (٤٦ - ٣) (لماذا؟)}$$

كما تلاحظ أن كل قانون من هذه القوانين الأربعة يساعدك على تحويل حاصل ضرب نسبتين مثلثتين إلى مجموع (أو الفرق بين) نسبتين مثلثتين ، فمثلاً :

$$\text{حا د حتاد} = \frac{1}{٤} [\text{حا (د + د) + حا (د - د) }] \quad \Leftarrow (٤٢ - ٣)$$

$$\text{حا د حا د} = \frac{1}{٤} [\text{حا (د + د) - حا (د - د) }]$$

$$\text{حا د حتاد} = \frac{1}{٤} [\text{حا (د + د) + حا (د - د) }]$$

$$\text{حا د حا د} = \frac{1}{٤} [\text{حا (د + د) - حا (د - د) }]$$

أو :

$$\text{حا د حا د} = \frac{1}{٤} [\text{حا (د - د) - حا (د + د) }]$$

مثال (٢٩-٣) :

احسب قيمة حتا $^{\circ}7٥$ حا $^{\circ}١٥$

الحل :

$$\begin{aligned} \text{حتا } ^{\circ}7٥ \text{ حا } ^{\circ}١٥ &= \frac{1}{4} [\text{حا } (^{\circ}١٥ + ^{\circ}7٥) - \text{حا } (^{\circ}١٥ - ^{\circ}7٥)] \text{ من } (٤٣ - ٣) \\ &= \frac{1}{4} (\text{حا } ^{\circ}٩٠ - \text{حا } ^{\circ}6٠) \\ &= \frac{1}{4} (1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

ثانيًا :

قلما نحتاج إلى المجموع (والفرق بين) جيبى الزاويتين ح + د ، ح - د أو جيبى تمامهما ، ولكن الذي نصادفه كثيراً جمع (أو طرح) جيبى زاويتين س ، ص أو جيبى تمامهما . أي أننا بحاجة إلى تحويل كل من : حا س + حا ص ، حا س - حا ص ، حتا س + حتا ص ، حتا س - حتا ص إلى جداء (أي حاصل ضرب) . فلو رجعنا إلى أي من القوانين السابقة (من ٣ - ٤٢) إلى (٣ - ٤٥) وفرضنا : ح + د = س ، ح - د = ص

$$\text{فإن الجمع يعطي } 2 \text{ ح} = \text{س} + \text{ص} \iff \frac{\text{س} + \text{ص}}{2} = \text{ح}$$

$$\text{والطرح يعطي : } 2 \text{ د} = \text{س} - \text{ص} \iff \frac{\text{س} - \text{ص}}{2} = \text{د}$$

وبالتعويض في القوانين المشار إليها نجد :

$$\text{حاس} + \text{حاص} = 2 \text{ حا } \frac{\text{س} + \text{ص}}{2} \text{ حتا } \frac{\text{س} - \text{ص}}{2} \text{ (٣ - ٤٧)}$$

$$\text{حاس} - \text{حاص} = 2 \text{ حتا } \frac{\text{س} + \text{ص}}{2} \text{ حا } \frac{\text{س} - \text{ص}}{2} \text{ (٣ - ٤٨)}$$

$$\text{حتاس} + \text{حتاص} = 2 \text{ حتا } \frac{\text{س} + \text{ص}}{2} \text{ حتا } \frac{\text{س} - \text{ص}}{2} \text{ (٣ - ٤٩)}$$

$$\text{حتاس} - \text{حتاص} = 2 \text{ حا } \frac{\text{س} + \text{ص}}{2} \text{ حا } \frac{\text{س} - \text{ص}}{2} \text{ (٣ - ٥٠)}$$

المتطابقة الأخيرة تكتب :

$$\text{حتاس} - \text{حتاص} = 2 \text{ حا } \frac{\text{س} + \text{ص}}{2} \text{ حا } \frac{\text{س} - \text{ص}}{2} \text{ (٣ - ٥١)}$$

مثال (٣٠ - ٣) :

حول إلى جداء :

$$(١) \text{ جتا } ٥ + \text{ جتا } ٣ - \text{ جتا } ٩ - \text{ جتا } ٣$$

الحل :

$$(١) \text{ جتا } ٥ + \text{ جتا } ٣ - \text{ جتا } ٩ - \text{ جتا } ٣ = ٢ \text{ جتا } \frac{٥+٣}{٢} - ٢ \text{ جتا } \frac{٩-٣}{٢} \text{ (لماذا ؟)}$$

$$= ٢ \text{ جتا } ٤ - ٢ \text{ جتا } ٣$$

$$(٢) \text{ جتا } ٩ - \text{ جتا } ٣ - \text{ جتا } ٩ - \text{ جتا } ٣ = ٢ \text{ جتا } \frac{٩-٣}{٢} - ٢ \text{ جتا } \frac{٩+٣}{٢} \text{ (لماذا ؟)}$$

$$= ٢ \text{ جتا } ٣ - ٢ \text{ جتا } ٦$$

مثال (٣١ - ٣) :

$$\text{أثبت صحة المتطابقة : } \frac{\text{جتا } ٣ - \text{جتا } ٢}{\text{جتا } ٣ + \text{جتا } ٢} = \text{ظا } ٣$$

الحل :

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{٢ \text{ جتا } ٢ - \text{جتا } ٣}{٢ \text{ جتا } ٢ + \text{جتا } ٣} \text{ (لماذا ؟)}$$

$$= \text{ظا } ٣ = \text{الطرف الأيسر} .$$

تدريب (٣ - ١٧)

(١) استنتج من المتطابقتين : (٤٢ - ٣) ، (٤٤ - ٣) صيغة لما تساويه ظاد .

(٢) استنتج من المجموعة الأولى لقوانين التحويل صيغة لما تساويه ظاد . ظاد .

(٣) برهن أن جتا ٧٠ - جتا ١٠ = - جتا ٤٠ .

(٤) في المثلث P ب ح أثبت أن : جتا ٢ P + جتا ٢ ب + جتا ٢ ح = ٤ جتا P جتا ب جتا ح

(٥) حول إلى مجموع (أو فرق) : (P) جتا ٢ حاه س جتا ٢ س (ب) جتا ٣ س جتا ٧ س

(٦) حول جتا P + جتا ب إلى جداء (للحل : أكتب جتا ب = جتا (ب - $\frac{\pi}{4}$))

تمارين (٣ - ٧)

(١) بدون استخدام الجداول أو الآلة الحاسبة أوجد قيم كل مما يلي :

$$(پ) \text{ جتا } ١٥^\circ \text{ جتا } ٧٥^\circ \quad (ب) \text{ جتا } ٤٥^\circ \text{ حا } ١٥^\circ \quad (د) \text{ جتا } ١٥^\circ \text{ حا } ٧٥^\circ$$

$$(د) \text{ حا } ٤٥^\circ \text{ حا } ١٥^\circ \quad (هـ) \text{ حا } ١٥^\circ \text{ جتا } ١٦٥^\circ \quad (و) \text{ حا } ١٣٥^\circ \text{ جتا } ٤٥^\circ$$

(٢) عبر عما يأتي بصورة حاصل ضرب :

$$(پ) \text{ جتا } ٩^\circ - \text{ جتا } ٣^\circ \quad (ب) \text{ حا } ٩^\circ - \text{ حا } ٣^\circ \quad (د) \text{ جتا } ٧^\circ + \text{ جتا } ٣^\circ$$

$$(د) \text{ حا } ٦^\circ + \text{ حا } ٤^\circ \quad (هـ) \text{ جتا } ٦٥^\circ - \text{ جتا } ٢٥^\circ \quad (و) \text{ حا } ٢٢^\circ - \text{ حا } ١٨^\circ$$

$$(ز) \text{ جتا } ٤٥^\circ + \text{ جتا } ١٥^\circ \quad (ح) \text{ حا } ٤٠^\circ + \text{ حا } ٢٠^\circ \quad (ط) \text{ حتا } ٥٠^\circ + \text{ حتا } ١٠^\circ$$

$$(ى) \text{ جا } ٦٦^\circ - \text{ جا } ٢٢^\circ$$

أثبت صحة المتطابقات الآتية (دون مناقشة شروط تطبيقها) :

$$(٣) \frac{\text{جتاهـد} - \text{جتاد}}{\text{جتاد} + \text{جتاهـد}} = - \text{ظا } ٣^\circ \text{ ظا } ٢^\circ$$

$$(٤) \text{ظا } ٢^\circ = \frac{\text{جا } ٢^\circ + \text{حـا } ٢^\circ}{\text{جتاد} + \text{جتاهـد}}$$

$$(٥) \text{ظاد} = \frac{\text{جا } ٢^\circ - \text{حـا } ٢^\circ}{\text{جتاد} + \text{جتاهـد}}$$

$$(٦) \text{ظا } ٢^\circ = \frac{\text{جتاهـد} - \text{جتاد}}{\text{حـا } ٢^\circ + \text{حـا } ٤^\circ}$$

$$(٧) \frac{\text{ظنا } ٧^\circ}{٢} = \frac{\text{جتاهـد} + \text{جتاد}}{\text{حـا } ٢^\circ + \text{حـا } ٥^\circ}$$

$$(٨) \frac{\text{حتاد}}{\text{جتاد}} - ١ = - \text{حا } ٢^\circ \text{ حـا } ٢^\circ \text{ ظاد}$$

أثبت مايتي :

$$(٩) \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \text{جتا } ٥٥^\circ \text{ جا } ٤٥^\circ + \text{حـا } ٥٥^\circ \text{ حـا } ٤٥^\circ$$

$$(10) \quad \sqrt[3]{\frac{3}{4}} = 15 \text{ جتا } 4 + 75 \text{ جتا } 5 = 15 \text{ جتا } 4 + 75 \text{ جتا } 5$$

(11) أثبت أن قياسات زوايا المثلث p ب d تحقق العلاقة :

$$\text{حا } p - \text{حا } b + \text{حا } d = 4 \text{ حا } \frac{p}{4} \text{ حا } \frac{b}{4} \text{ حا } \frac{d}{4}$$

(12) لتحويل حا 3 س + حا 9 س + حا 15 س إلى جداء ، نكتب :

$$\text{المقدار} = \text{حا } 15 \text{ س} + \text{حا } 3 \text{ س} + \text{حا } 9 \text{ س}$$

$$= 2 \text{ حا } 9 \text{ س} + 6 \text{ حا } 3 \text{ س} + 9 \text{ حا } 3 \text{ س}$$

$$= 9 \text{ حا } 3 \text{ س} (2 \text{ جتا } 3 \text{ س} + 1)$$

اتبع الأسلوب نفسه لتحويل حتاه س + حتا 8 س + حتا 11 س إلى جداء

$$(13) \quad \text{اختصر المقدار الآتي إذا كان معرفاً : } \frac{\text{حتاه س} + \text{حتا } 10 \text{ س} + \text{حتا } 15 \text{ س}}{\text{حا ه س} + \text{حا } 10 \text{ س} + \text{حا } 15 \text{ س}}$$

(14) مانوع المثلث الذي تحقق قياسات زواياه العلاقة حتا p + حتا b = حا d

٣ - ١٠ المعادلات المثلثية :

إذا كان المتغير في معادلة ما معطى بوساطة دالة (أو أكثر) من الدوال المثلثية (حتا ، حا ، ظا ، ظلًا ، . .) فإن هذه المعادلة تدعى معادلة مثلثية ، مثل المعادلات : $\sqrt{2} \text{ حتا س} = 1$ ،

$2 \text{ حا ه} + \text{حتا ه} = 1$ ، $\text{ظا ص} - 3 = 0$ ، . . . ولحل أي معادلة مثلثية ، لابد لنا من التوصل إلى قيم الدالة المثلثية التي تحتويها ، وفق ماتعلمناه في حل المعادلات الجبرية ومن ثم التوصل إلى قيم المتغير التي تشكل مجموعة الحل . ومن هنا كان علينا أن نتعرف على طريقة حل كل من المعادلات الآتية والتي ندعوها (المعادلات المثلثية الأساسية) :

$$\text{حتا س} = p \text{ ، حا س} = p \text{ ، ظا س} = p$$

مثال (٣١ ٣) :

$$(3 - 52)$$

أوجد مجموعة الحل للمعادلة $p = \text{حتا س}$

الحل :

لعلك تذكر أن $1 - \gg \text{حتاس} \gg 1$ حسب

(٣ - ٢)

وبالتالي :

إذا كانت $1 < P$ أو $1 > P$ فإن المعادلة

(٢ - ٥٢)

مستحيلة الحل في ح أي أن مجموعة الحل $\emptyset =$

- وإذا كانت $P \in [1, 1-]$ فإنه يوجد على الأقل زاوية قياسها ه بحيث :

$P = \text{حتا ه}$ ، وتصبح المعادلة (٢ - ٥٢) : $\text{حتا س} = \text{حتا ه}$ فيكون القياس الرئيسي للزاوية

س هو : $\text{س} = \text{ه}$ أو $\text{س} = -\text{ه}$

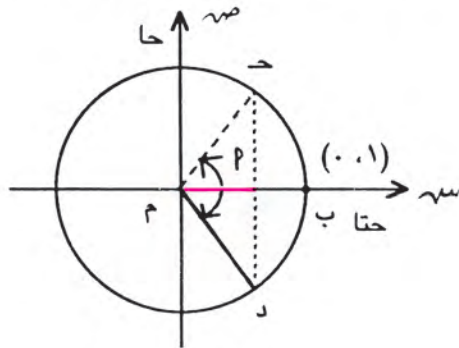
(انظر الشكل ٣ - ٤٤)

ويكون القياس العام للزاوية س

الذي يمثل مجموعة الحل للمعادلة (٢ - ٥٢)

في ح هو

{ س : س = $\pm \text{ه} + 2\text{م ط}$ حيث $\text{م} \in \mathbb{R}$ }



شكل (٢ - ٤٤)

مثال (٣ - ٣٢) :

أوجد مجموعة الحل للمعادلة $\sqrt{3} \text{حتا س} - 1 = 0$.

(١) في الفترة $[0, \text{ط}]$ (٢) في الفترة $[-\frac{\text{ط}}{4}, \frac{\text{ط}}{4}]$

(٣) في الفترة $[0, 2\text{ط}]$ (٤) في ح .

الحل :

المعادلة $\sqrt{3} \text{حتاس} - 1 = 0 \iff \text{حتاس} = \frac{1}{\sqrt{3}} \in [1, 1-]$

والزاوية الموجبة ه التي تحقق $\text{حتا ه} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ قياسها الرئيسي 45° أو $-\frac{\text{ط}}{4}$ راديان أي

أن المعادلة تكتب على الشكل : $\text{حتاس} = \text{حتا} \frac{\text{ط}}{4}$ وبالتالي :

(١) في الفترة $[0, \pi]$ يكون $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، أي أن مجموعة الحل $\{ \frac{\pi}{4} \}$

(٢) في الفترة $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ وبالرجوع إلى الشكل (٣ - ٤٤) يوجد حلان

هما $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ ، ومجموعة الحل $\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \}$

(٣) في الفترة $[\pi, 2\pi]$ وبالرجوع إلى الشكل (٣ - ٤٤) يوجد حلان :

هما $\frac{5\pi}{4}$ و $\frac{7\pi}{4}$ ، ومجموعة الحل $\{ \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \}$

(٤) في مجموعة الأعداد الحقيقية ح تكون مجموعة الحل :

$$\{ x : \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } x \in \mathbb{R} \}$$

ملحوظة (٣ - ٩)

لعلك تلاحظ أن الحلين $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ ينتجان من الصيغة $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ بتعويض x بالقيمتين $0, \pi$ على الترتيب . وواضح لديك القياس الأول للزاوية الموجهة السالبة $\langle \sin x \rangle$ والقياس الثاني للزاوية الموجبة $\langle \cos x \rangle$

تدريب (٣ - ١٨)

حل في ح كلاً من المعادلات :

$$(1) \sin x = 1 \quad (2) \cos x = 1 \quad (3) \sin x = 0$$

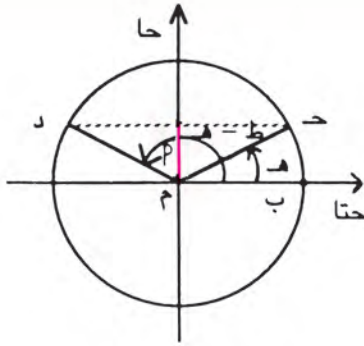
مثال (٣ - ٣٣) :

أوجد مجموعة الحل للمعادلة $\sin x = \frac{1}{2}$ حاس $x \in [0, 2\pi]$

الحل :

تعلم أن $0 \leq \sin x \leq 1$ حاس $x \in [0, \pi]$ حسب (٣ - ٢)

وبالتالي فإن $x \in [0, \pi]$ وإذا تحقق هذا الشرط فإنه يوجد على الأقل زاوية قياسها



شكل (٤٥-٢)

هـ حيث $ح = هـ$ وتصبح المعادلة (٥٣-٢)

حاس $= ح = هـ$ ويكون القياس الرئيسي للزاوية س

$$\text{هو: ق } (\leftarrow) = ح = هـ$$

$$\text{أو: ق } (\leftarrow) = ح - ط = هـ$$

(كما هو واضح في الشكل (٤٥-٢))

ويكون القياس العام للزاوية س الذي يمثل مجموعة

الحل للمعادلة (٥٣-٢) في ح هو:

$$\{ س : س = ٢م + ط \text{ أو } س = ٢م - ط = هـ - ط + ٢م , م \in \mathbb{R} \}$$

مثال (٣٤-٣):

أوجد مجموعة الحل للمعادلة: $\frac{1}{\sqrt{3}} = ح$ على الفترات الآتية.

$$(P) \left[-\frac{\pi}{\sqrt{3}}, 0 \right], (B) [0, \pi], (C) [0, 2\pi], (D) ح$$

الحل:

لعلك تذكر أن: $ح = \frac{1}{\sqrt{3}} = (\cdot 30^\circ)$ أي أن:

$ح = \frac{1}{\sqrt{3}} \iff ح = \frac{\pi}{6}$ ، بالرجوع إلى الشكل (٤٥-٢) نجد:

(P) في الفترة $[0, \frac{\pi}{\sqrt{3}}]$ يكون: $س = \frac{\pi}{6}$ ومجموعة الحل $\{ \frac{\pi}{6} \}$

(B) في الفترة $[0, \pi]$ يكون: $س = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ ومجموعة الحل $\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \}$

(C) في الفترة $[0, 2\pi]$ مجموعة الحل $\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \}$

(D) في مجموعة الأعداد الحقيقية ح تكون مجموعة الحل:

$$\{ س : س = \frac{\pi}{6} + ٢م \text{ أو } س = \frac{5\pi}{6} + ٢م , م \in \mathbb{R} \}$$

تدريب (٣-١٩)

حل في ح كلاً من المعادلات :

$$(١) \text{ حاس } = ١ , (٢) \text{ حاس } = -١ , (٣) \text{ حاس } = ٠ , (٤) \text{ حاس } = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

مثال (٣-٣٥) :

أوجد مجموعة الحل للمعادلة : $P = \text{طاس} (٣-٥٤)$

الحل :

بالرجوع إلى التعريف (٢-٦) نستطيع الانتباه إلى أنه في هذه الحالة :

$$س \neq \frac{\text{ط}}{٢} + م , م \in \text{ص}$$

وبالرجوع إلى الملاحظة (٢-٥) والشكل (٢-٤٦)

تستطيع أن تدرك أنه يوجد زاوية على الأقل هـ حيث $\text{طاس} = P$

$$P \in]-\infty, \infty[\text{ وتصبح المعادلة (٢-٥٤)}$$

طاس = طاهـ ويكون القياس الرئيسي للزاوية س هو :

$$ق \left(\left\langle \text{ب م ح} \right\rangle \right) = هـ \text{ أو : ق} \left(\left\langle \text{ب م د} \right\rangle \right) = ط + هـ$$

ويكون القياس العام للزاوية س الذي يمثل مجموعة الحل في ح للمعادلة (٢-٥٤) هو :

$$\{ س : س = هـ + م + ط , م \in \text{ص} \}$$

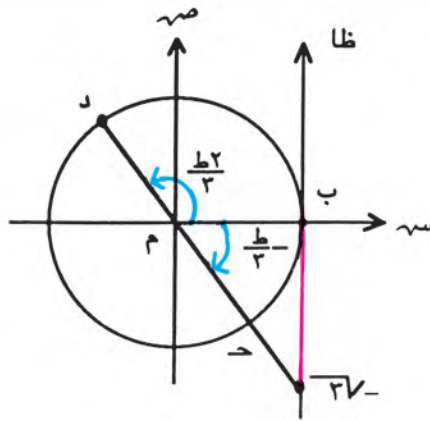
مثال (٣-٣٦) :

أوجد مجموعة الحل للمعادلة : طاس $= \sqrt{٣}$ على الفترات :

$$(P) [٠, ٢\pi] , (ب) [٠, \pi] , (ح) [٠, \frac{\pi}{٢}] , (د) ح$$

الحل :

$$\text{طاس} = \sqrt{٣} \iff \text{طاس} = -\sqrt{٣} = -\text{ظا} \left(\frac{\pi}{٣} \right) = \text{ظا} \left(-\frac{\pi}{٣} \right) \text{ (لماذا ؟)}$$



شكل (٢-٤٧)

(٢) في الفترة $[٠, ٢٠ ط]$

$$س = ط٢ + \frac{ط}{٣} = \frac{٥ط}{٣}$$

$$س = ط + \frac{ط}{٣} = \frac{٤ط}{٣}$$

ومجموعة الحل $\{ \frac{٤ط}{٣}, \frac{٥ط}{٣} \}$

(ب) في الفترة $[٠, ط]$ مجموعة الحل $\{ \frac{٢ط}{٣} \}$

(ح) في الفترة $[٠, \frac{ط}{٣}]$ مجموعة الحل \emptyset

(د) في ح مجموعة الحل :

$$\{ س : س = ط + \frac{ط}{٣}, م, م \subseteq \}$$

تدريب (٣-٢٠)

(١) في المثال (٣-٣٦) استنتج حلول الفقرات (٢), (ب), (ح) من حل الفقرة (د)

(٢) حل في ح كلاً من المعادلات :

$$(٢) ط س = ١ \quad (ب) ط س = ١ - \quad (ح) ط س = ٠$$

مثال (٣-٣٧) :

أوجد مجموعة الحل للمعادلة :

$$٢ \text{ حتا } د - \text{ حتا } د = ١ - \quad . \quad \text{حيث : } ٠ \gg د > ٢ ط$$

الحل :

بتحليل ثلاثي الحدود في الطرف الأيمن نجد :

$$. = (٢ \text{ حتا } د + ١) (١ - \text{ حتا } د)$$

$$. = ٢ \text{ حتا } د + ١ \quad \text{أو} \quad . = ١ - \text{ حتا } د$$

$$\text{ومنه : } \text{ حتا } د = \frac{١}{٢} \quad \text{أو} \quad \text{ حتا } د = ١$$

$$\text{الحل الأول : } \text{ حتا } د = \frac{١}{٢} \quad \text{في الفترة } [٠, ٢٠ ط] \quad \text{حتا } د = \frac{٢ط}{٣}, \frac{٤ط}{٣}$$

الحل الثاني : حتا ح = ١ في الفترة [٠ ، ٢ ط] ح = ٠

فتكون مجموعة الحل : $\{ \frac{٢٢}{٣} ، \frac{٢٤}{٣} ، ٠ \}$

مثال (٣ - ٣٨) :

حل في ح المعادلة $\sqrt{٣٧}$ حتا س - حا س = $\sqrt{٢٧}$

استنتج مجموعة الحل في الفترة [٠ ، ٢٦٠]

الحل :

لو قسمنا حدود المعادلة على ٢ لأصبحت

$$\frac{\sqrt{٣٧}}{٢} \text{ حتا س} - \frac{١}{٢} \text{ حا س} = \frac{\sqrt{٢٧}}{٢}$$

$$\text{أو : حتا } ٢٠ \text{ حتا س} - \text{حا } ٢٠ \text{ حا س} = \frac{\sqrt{٢٧}}{٢}$$

$$\text{أو : حتا } (٢٠ + \text{س}) = ٤٥ \text{ حتا } (؟)$$

$$\Leftarrow ٢٠ + \text{س} = ٤٥ \pm ٢٦٠ \text{ م} \Rightarrow \text{ص}$$

$$\text{س} = ٢٠ \pm ٤٥ + ٢٦٠ \text{ م} \Rightarrow \text{ص}$$

ولاستنتاج مجموعة الحل في الفترة [٠ ، ٢٦٠] نعوض عن م بقيمتها الصحيحة المناسبة فنجد:

$$\text{من المجموعة : س} = ٢٠ - ٤٥ + ٢٦٠ = \text{م} ٢٦٠ + ١٥ = \text{س} \Leftarrow ١٥$$

$$\text{ومن المجموعة : س} = ٢٠ + ٤٥ - ٢٦٠ = \text{م} ٢٦٠ + ٧٥ = \text{س} \Leftarrow ٢٨٥$$

فتكون مجموعة الحل $\{ ١٥ ، ٢٨٥ \}$

تدريب (٣ - ٢١)

(١) أوجد مجموعة الحل في ح للمعادلة الواردة في المثال (٢ - ٢٧) ثم استنتج منها

المجموعة التي توصلت إليها في الفترة [٠ ، ٢ ط]

(٢) أوجد مجموعة الحل للمعادلة المثلثية في الفترة المعطاة :

$$٢ \text{ حا } ٢ - ٣ \text{ حا } ٢ + ١ = ٠ ، ٠ \geq \text{ح} > ٢ \text{ ط}$$

(٣) حل المعادلة : حتا ٢ س - حا ٢ س = ١ ، ٠ \geq \text{س} \geq ٢٦٠ (اقسم حدود المعادلة على $\sqrt{٢٧}$)

مثال (٣ - ٣٩) :

أوجد مجموعة الحل للمعادلة المثلثية في الفترة المعطاة

$$\text{حا } ٢ - \text{حا } ٢ = ٠ , \text{ ح } ٠ , \text{ ط } ٢]$$

الحل :

باستخدام حا ٢ = ٢ حا ح جتا ح نجد :

$$\text{حا } ٢ - \text{حا } ٢ = ٠ , \text{ حا } ٢ (\text{جتا ح} - ١) = ٠$$

$$\text{حا } ٢ = ٠ \quad \text{أو} \quad \text{جتا ح} = ١$$

$$\text{حا } ٢ = ٠ \quad \text{أو} \quad \text{جتا ح} = \frac{٢}{٣}$$

$$\text{حا } ٢ = ٠ \quad \text{أو} \quad \text{حا } ٢ = \frac{٢}{٣}$$

جتا ح = $\frac{٢}{٣}$ ليس لها حل . (لماذا ؟)

إذن مجموعة الحل = { ٠ , ط }

مثال (٣ - ٤٠) :

أوجد مجموعة الحل للمعادلة المثلثية في الفترة المعطاة :

$$\text{جتا } ٢ + \text{حا } ٢ = \text{قا } ٢ \quad \text{ط } \geq \text{ح} > \text{ط } ٢$$

(پ) بالتقدير الدائري . (ب) بالتقدير الستيني .

الحل :

$$\text{بما أن } \text{جتا } ٢ + \text{حا } ٢ = \text{قا } ٢$$

$$\text{إذن } \text{جتا } ٢ + \text{حا } ٢ = ١ \quad (\text{لماذا ؟})$$

$$\text{جتا } ٢ + \text{حا } ٢ = ١ \quad \text{من المتطابقة الأساسية (٣ - ٤)}$$

$$\text{جتا } ٢ + \text{حا } ٢ - ١ = ٠$$

$$\text{جتا } ٢ + \text{حا } ٢ - ١ = ٠$$

$$\text{حا } ٢ = \frac{١}{٢} \quad \text{أو} \quad \text{حا } ٢ = ١$$

$$\text{حا } ٢ = \frac{١}{٢} , \text{ حا } ٢ = \frac{١}{٢} \quad \text{أو} \quad \text{حا } ٢ = \frac{١}{٢}$$

الحل $\frac{ط}{٧} = ح$ حل مرفوض (لماذا ؟)

إذن مجموعة الحل بالتقدير الدائري = $\{ \frac{٧ط}{٧} , \frac{١١ط}{٧} \}$

مجموعة الحل بالتقدير الستيني = $\{ ٢١٠ , ٢٣٠ \}$

مثال (٣ - ٤١) :

أوجد مجموعة الحل للمعادلة المثلثية :

$$قا ح + ظا ح = ٠ \quad ح \in [٢٧, ٠]$$

الحل :

نضع المعادلة على الصورة :

$$قا ح = - ظا ح$$

$$\text{أو : } \frac{١}{\text{حتا ح}} = - \frac{\text{حا ح}}{\text{حتا ح}} \quad \text{حتا ح} \neq ٠$$

وبالتالي $ح \neq \frac{ط}{٧} , \frac{٢ط}{٧}$ (لماذا ؟)

فيكون : حا ح = - ١ إذن : $ح = \frac{٢ط}{٧}$ غير مقبول

⇐ إذن مجموعة الحل = \emptyset

تدريب (٣ - ٢٢)

(١) أوجد مجموعة الحل للمعادلة المثلثية :

$$قا ح + ٢ ح = ٠ \quad ح \in [٢٧, ٠]$$

(٢) أوجد مجموعة الحل للمعادلة :

$$٢٧٢ حاس حتا س - ٢ حاس + ١ = ٢٧ \quad س \in [٢٧, ٠]$$

(إرشاد : استعمل قوانين ضعف الزاوية ثم استعمل طريقة المثال ٣ - ٢٨)

تمارين (٣ - ٨)

أوجد مجموعة الحل للمعادلات المثلثية الآتية حسب الفترات المبينة أمامها .

(P) بالتقدير الدائري . (ب) بالتقدير الستيني .

- (١) $\frac{1}{2} = \text{حـا حـ}$
- (٢) $\frac{1}{\sqrt{3}} = \text{ظنا حـ}$
- (٣) $\text{حـا حـ} = \text{ظا حـ} = .$
- (٤) $\text{حـا حـ} = \text{جتا حـ}$
- (٥) $\text{حـا حـ} + \text{حـا حـ} = .$
- (٦) $\text{ظا حـ} + \frac{2}{3} = \text{جتا حـ} = ١$
- (٧) $٢ \text{جتا}^2 \text{حـ} - \text{جتا حـ} = .$
- (٨) $٢ \text{جتا حـ} + \text{ظا حـ} = \text{قا حـ}$
- (٩) $\text{قتا}^{\circ} \text{حـ} - ٤ \text{قتا حـ} = .$
- (١٠) $٢ \text{جتا}^2 \text{حـ} + \text{حتا}^2 \text{حـ} - ٢ \text{جتا حـ} - ١ = .$
- (١١) $\text{جتا حـ} \text{ظنا}^2 \text{حـ} = \text{حتا حـ}$
- (١٢) $\text{حـا حـ} + ٢ \text{حتا}^2 \text{حـ} = ١$
- (١٣) $٢ \text{قا حـ} + \text{حـا حـ} + ٢ = ٤ \text{حـا حـ} + \text{قا حـ}$
- (١٤) $\text{حـا حـ} = ٢ \text{حـا حـ}$
- (١٥) حل في ح المعادلة :

$$\text{حـا}^2 \text{س} + \text{حتا}^2 \text{س} = \text{حـا س}$$

(إرشاد : قسم حدود المعادلة على $\text{حتا}^2 \text{س}$ ، وناقش عما إذا كان :

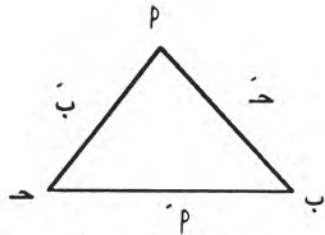
$$\text{س} = \frac{\text{ط}}{٢} + \text{م ط} ، \text{م} \in \text{ص} - \text{حلأها}$$

(١٦) حل في ح المعادلة :

$$٢ \text{حتا}^2 \text{س} + \text{حا}^2 \text{س} - \text{حا} \text{س} \text{حتا} \text{س} = ٢$$

(إرشاد : طبق قوانين ضعف الزاوية)

٣ - ١١ العلاقة بين قياسات زوايا المثلث وأطوال أضلاعه :



شكل (٣-٤٨)

إن عناصر أي مثلث P ب ح هي أطوال أضلاعه :

$$\bar{b} = |P \text{ح}| , \bar{c} = |P \text{ب}| , \bar{a} = |P \text{ح}|$$

وقياسات زواياه : P, β, α ، ح ، ب ، ح

سنبحث في هذا البند عن العلاقات بين هذه العناصر .

أولاً : قاعدة جيوب التمام :

في الشكل (٣-٤٩) المثلث P ب ح ، وضعنا زاويته \hat{P} في وضع قياسي بحيث تنطبق P على

نقطة الأصل، $[P \text{ب}]$ على الجزء الموجب لمحور السينات ، ورسمنا دائرة الوحدة التي مركزها P

فقطعت $[P \text{ح}]$ في N (حتا P ، حا P) (راجع التعريف ٣-٤) . ومن تشابه المثلثين $أ ن و$ ،

$ح د$ وباعتبار القطع \bar{p} و \bar{d} ، \bar{p} و $\bar{ن}$ ، $\bar{د}$ و $\bar{ح}$ موجهة نجد :

$$\frac{|P \text{ن}|}{|P \text{ح}|} = \frac{\bar{ن}}{\bar{د}} = \frac{\bar{p}}{\bar{د}}$$

$$\text{أو : } \frac{1}{\bar{ب}} = \frac{\text{حا} P}{\bar{ص}} = \frac{\text{حتا} P}{\bar{س}}$$

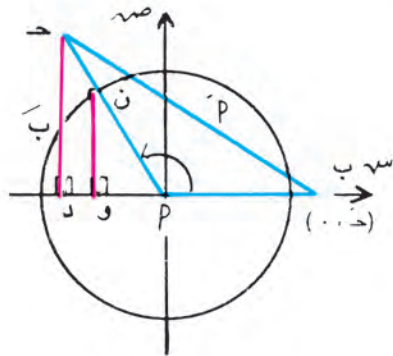
ويكون إذن :

$$\bar{س} = \bar{ب} \text{حتا} P , \bar{ص} = \bar{ب} \text{حا} P$$

ومن المثلث $ب ح د$ القائم في $د$ نجد :

$$|ب \text{ح}|^2 = |ب \text{د}|^2 + |د \text{ح}|^2$$

$$\text{أو : } \bar{p}^2 = \bar{ب}^2 (\text{حتا} P - \text{حا} P)^2 + \bar{ب}^2 (\text{حا} P)^2$$



شكل (٣-٤٩)

$$P^2 \hat{C} - 2 \hat{C} \hat{P} + P^2 \hat{C} + P^2 \hat{C} + P^2 \hat{C} =$$

$$(\hat{C} - P)^2 + P^2 \hat{C} =$$

$$(05 - 3)$$

$$P^2 \hat{C} - 2 \hat{C} \hat{P} + P^2 \hat{C} = P^2 \hat{C}$$

فيكون إذن :

$$(06 - 3)$$

$$P^2 \hat{C} - 2 \hat{C} \hat{P} + P^2 \hat{C} = P^2 \hat{C}$$

وبطريقة مشابهة :

$$(07 - 3)$$

$$P^2 \hat{C} - 2 \hat{C} \hat{P} + P^2 \hat{C} = P^2 \hat{C}$$

مثال (3 - 42) :

احسب زوايا المثلث P ب ح علماً بأن : $\overline{6V} = \overline{P}$ ، $\hat{2} = \hat{C}$ ، $1 + \overline{3V} = \hat{C}$

الحل :

من العلاقة (3 - 05) نجد :

$$\frac{6 - 1 + \overline{3V} \hat{2} + 3 + 4}{(1 + \overline{3V}) \hat{2} \times \hat{2}} = \frac{P^2 \hat{C} - 2 \hat{C} \hat{P} + P^2 \hat{C}}{P^2 \hat{C}} = P \hat{C}$$

$$\frac{1}{\hat{2}} = \frac{(1 + \overline{3V}) \hat{2}}{(1 + \overline{3V}) 4} = \frac{\overline{3V} \hat{2} + 2}{(1 + \overline{3V}) 4}$$

$$\hat{6} = \hat{P} \Leftarrow$$

ومن العلاقة (3 - 06) نجد :

$$\frac{\overline{3V} \hat{2} + 6}{\overline{3V} \overline{3V} (1 + \overline{3V}) \hat{2}} = \frac{4 - 6 + 1 + \overline{3V} \hat{2} + 3}{\overline{6V} (1 + \overline{3V}) \hat{2}} = \frac{P^2 \hat{C} - 2 \hat{C} \hat{P} + P^2 \hat{C}}{P^2 \hat{C}} = P \hat{C}$$

$$\frac{1}{\overline{3V}} = \frac{(\overline{3V} + 3) \hat{2}}{(\overline{3V} + 3) \overline{3V} \hat{2}}$$

$$\hat{45} = \hat{C} \Leftarrow$$

$$\hat{75} = (\hat{45} + \hat{6}) - \hat{18} = \hat{C}$$

ملحوظة (٣ - ١٠)

في المثال (٣ - ٤٢) تمكنا من إيجاد زوايا المثلث بعد معرفة أضلعه وبصورة عامة فإن عملية إيجاد العناصر المجهولة من أضلاع المثلث وزواياه باستخدام عناصره المعلومة (أو باستخدام معطيات أخرى كافية) تدعى : حل المثلث .

مثال (٣ - ٤٣) :

حل المثلث P ب $ح$ الذي فيه $\hat{P} = 8$ سم ، $\hat{ب} = 10$ سم ، $\hat{ح} = 5$ سم

الحل :

العناصر المجهولة هي قياسات الزوايا ، P ، $ب$ ، $ح$

$$* \text{ من (٣ - ٥٥) جتا } P = \frac{\hat{ب}^2 + \hat{ح}^2 - \hat{P}^2}{2 \hat{ب} \hat{ح}} = \frac{100 - 25 + 64}{100} = 0.61$$

ومن الجداول (أو الآلة الحاسبة) نجد $P \approx 52.14^\circ$

* ومن (٣ - ٥٦) وبعد التعويض وإجراء الحسابات نجد :

$$\text{حتا } ب = \frac{11}{8} = 1.375 \text{ . (} \hat{ب} \text{ زاوية منفرجة ، لماذا ؟)}$$

$$\hat{ب} \approx 98^\circ \text{ (من الجداول أو الآلة الحاسبة)}$$

$$* \hat{ح} = 180^\circ - (\hat{ب} + \hat{P}) = 30^\circ$$

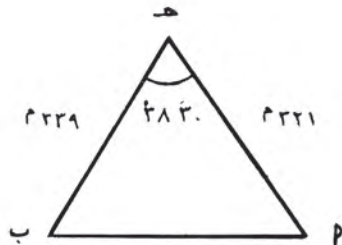
مثال (٣ - ٤٤) :

يراد حفر نفق عبر جبل من النقطة P إلى النقطة $ب$

انظر الشكل (٣ - ٥٠) فرصدت المسافة من النقطة $ح$ إلى كل

من النقطتين P ، $ب$ فكانتا : ٣٢١ متراً ، ٣٢٩ متراً على التوالي ،

فإذا كانت الزاوية $\hat{ب} = 28.2^\circ$ فأوجد طول النفق .



شكل (٣ - ٥٠)

الحل :

طول النفق = $|P|$

ومن علاقة جيب التمام في المثلث P ب $ح$

$$|P| = |ح| + |ح ب| - |P| \quad |ح| = |ح ب| - |P|$$

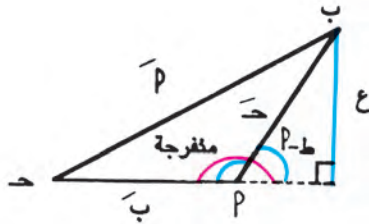
$$= \sqrt{(321)^2 - (339)^2} + \sqrt{(321)^2 - (339)^2} = 0.7826 \times (339) (321) 2 - \sqrt{(339)^2} + \sqrt{(321)^2} =$$

$$\approx 47639 \iff |P| \approx 26, 218 \text{ م}$$

ثانياً : حساب مساحة المثلث بمعرفة ضلعين والزاوية المحصورة بينهما :

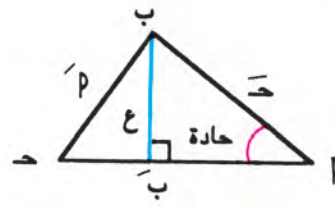
في كل من الشكلين (٣ - ٥١) ، (٣ - ٥٢) بفرض $ع$ طول الارتفاع النازل على $[P ح]$:

$$\text{مساحة المثلث } P \text{ ب } ح : م = \frac{1}{2} \times ع \times \bar{ب}$$



شكل (٣-٥٢)

$$ع = ح ح (ط - P) = ح ح P$$



شكل (٣-٥١)

$$ع = ح ح P$$

بالحالتين :

$$م = \frac{1}{2} \times ع \times \bar{ب}$$

$$م = \frac{1}{2} \times ع \times \bar{ب} ح ح P$$

$$م = \frac{1}{2} \times ع \times \bar{ب}$$

$$\text{أو : } م = \frac{1}{2} \times ع \times \bar{ب} ح ح P$$

أي أن مساحة المثلث = $\frac{1}{2} \times$ حاصل ضرب طولي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما

$$(٣ - ٥٨)$$

$$(٣ - ٥٩)$$

$$(٣ - ٦٠)$$

$$م = \frac{1}{2} \times \bar{ب} ح ح P$$

$$م = \frac{1}{2} \times \bar{ب} ح ح P$$

$$م = \frac{1}{2} \times \bar{ب} ح ح P$$

وبالتالي :

وكذلك

وأيضاً

ثالثاً : قاعدة الجيوب :

$$\begin{aligned} (61 - 3) \quad \frac{\widehat{ب}}{\widehat{ح}} &= \frac{\widehat{پ}}{P} : \text{من } (59 - 3), (58 - 3) \text{ نجد} \\ (62 - 3) \quad \frac{\widehat{ح}}{\widehat{ح}} &= \frac{\widehat{ب}}{\widehat{ح}} : \text{ومن } (59 - 3), (60 - 3) \text{ نجد} \\ &\text{وأخيراً ، من } (61 - 3), (62 - 3) \text{ ينتج :} \end{aligned}$$

$$(63 - 3) \quad \boxed{\frac{\widehat{ح}}{\widehat{ح}} = \frac{\widehat{ب}}{\widehat{ح}} = \frac{\widehat{پ}}{P}}$$

هذه العلاقة التي ندعوها : قاعدة الجيوب أو علاقة الجيوب .

وهي تعني أن : قياسات أضلاع أي مثلث تتناسب مع جيوب الزوايا المقابلة لها .

مثال (٤٥-٣) :

$$\text{حل المثلث } P \text{ ب } \widehat{ح} \text{ مع العلم أن : } \widehat{پ} = 2\sqrt{2}, \widehat{ب} = 2\sqrt{3}, \widehat{ح} = 45^\circ .$$

الحل :

لاحظ أن المجاهيل هي : $\widehat{ح}$ ، $\widehat{ب}$ ، $\widehat{پ}$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\widehat{ح}} = \frac{2\sqrt{3}}{45} : \text{ومنه}$$

$$\frac{\widehat{ب}}{\widehat{ح}} = \frac{\widehat{پ}}{P}$$

(لماذا ؟)

$$\frac{2\sqrt{3}}{45} = \widehat{ح} \text{ فيكون } \widehat{ح} = \frac{2\sqrt{3}}{45}$$

(لماذا ؟)

$$\widehat{ب} = 60^\circ \text{ أو } \widehat{ب} = 120^\circ$$

$$\widehat{پ} = 45^\circ$$

$$\widehat{پ} = 45^\circ$$

(لماذا ؟)

$$\widehat{ح} = 75^\circ$$

$$\widehat{ح} = 15^\circ$$

يوجد مثلثان يحققان الشروط المعطاة .

$$* \text{ لحساب } \hat{C} \text{ في الحالة الأولى } \frac{\hat{C}}{\text{حـا}} = \frac{\hat{P}}{P}$$

$$\text{حيث حـا} = \text{حـا}^{\circ} 7 = \frac{\sqrt{27} + \sqrt{67}}{4} \quad (\text{لماذا ؟})$$

$$\text{وبالتعويض والحساب تجد أن } \hat{C} = \sqrt{27} + \sqrt{67} = 86.3$$

* ولحساب \hat{C} في الحالة الثانية وباستخدام علاقة الجيوب نفسها تجد أن :

$$\hat{C} = \sqrt{27} - \sqrt{67} \approx 1.3 \quad (\text{تحقق من ذلك})$$

تدريب (٣-٢٣)

(١) استعمل قاعدة جيوب التمام لحساب \hat{C} في كلٍ من الطين الواردين في المثال (٣-٤٥)

(٢) في متوازي الأضلاع P ب ح د : $|P| = |ب| = |س|$ ، $|ب| = |ح| = |ص|$ ، قياس الزاوية P ب ح = هـ

احسب مساحته . طبق ذلك إذا علمت أن $س = 10$ سم ، $ص = 5$ سم ، $هـ = 60^{\circ}$

(٣) مانوع المثلث الذي يحقق العلاقة \bar{P} حتا $P = \bar{ب}$ حتا ب .

مثال (٣-٤٦) :

أثبت أنه لا يمكن رسم المثلث P ب ح الذي فيه : $\hat{P} = 50$ سم ، $\bar{ب} = 8$ سم ، $\hat{P} = 40^{\circ}$

الحل :

$$\text{من قانون الجيب : } \frac{\bar{ب}}{\text{حـا}} = \frac{\hat{P}}{P} \iff \frac{\bar{ب}}{\text{حـا}} = \frac{\hat{P}}{P}$$

$$\text{حـا} = \frac{\bar{ب}}{\hat{P}} \times P = \frac{8}{50} \times 76.428 = 11.9848$$

$$= 11.9848$$

ولكن $11.9848 \notin [1, 1]$ وبالتالي لا يوجد زاوية قياسها ب بحيث $\text{حـا} = 11.9848$ ،

ولا يوجد مثلث يحقق معطيات المسألة .

مثال (٤٧ - ٣) :

حل المثلث P بـ ح إذا علمت أن : $\hat{P} = 44^\circ$ ، $\bar{B} = 10^\circ$ سم ، $\bar{C} = 12^\circ$ سم

الحل :

لاحظ أن المجاهيل هي : \hat{P} ، \hat{B} ، \hat{C}

$\hat{P} = \hat{B} + \bar{C} - \bar{B} = 10^\circ + 12^\circ - 144^\circ = -122^\circ$ حتماً P وبالتعويض واستخدام الجداول أو الآلة الحاسبة

$$\hat{P} = 100^\circ = 144^\circ - 12^\circ \times 10^\circ \times 12^\circ \times 0.7193 = 71.368$$

$$\hat{P} = 89.448^\circ \text{ سم}$$

ومن قانون الجيب : $\frac{\hat{P}}{\text{حـ ا ب}} = \frac{\bar{B}}{\text{حـ ا ب}} \iff \frac{\hat{P}}{\text{حـ ا ب}} = \frac{\bar{B}}{\text{حـ ا ب}}$ وبالتعويض :

$$\text{حـ ا ب} = \frac{0.7193 \times 10}{89.448} = 0.8223$$

$$\hat{B} = 19^\circ 55' \text{ (من الجداول أو الآلة الحاسبة)}$$

$$\hat{C} = 180^\circ - (44^\circ + 19^\circ 55') = 116^\circ 5'$$

مثال (٤٨ - ٣) :

حل المثلث P بـ ح إذا علمت أن $\bar{B} = 37^\circ + 1$ ، $\bar{C} = 37^\circ - 1$ ، $\hat{C} - \hat{B} = 90^\circ$

الحل :

المجاهيل : \hat{P} ، \hat{B} ، \hat{C}

من علاقة الجيوب : $\frac{\hat{C}}{\text{حـ ا ح}} = \frac{\bar{B}}{\text{حـ ا ب}}$

ومن خصائص التناسب : $\frac{\hat{C} + \bar{B}}{\text{حـ ا ب} + \text{حـ ا ح}} = \frac{\hat{C} - \bar{B}}{\text{حـ ا ب} - \text{حـ ا ح}}$

$$\text{أو : } 37 = \frac{37 \times 2}{2} = \frac{\hat{C} + \bar{B}}{\hat{C} - \bar{B}} = \frac{\text{حـ ا ب} + \text{حـ ا ح}}{\text{حـ ا ب} - \text{حـ ا ح}}$$

تمارين (٣-٩)

حل المثلث P ب ح في كل الحالات التالية :

$$(١) \quad \hat{P} = 62^\circ , \quad \hat{B} = 75^\circ , \quad \hat{C} = 13^\circ$$

$$(٢) \quad \hat{P} = 32^\circ , \quad \hat{C} = 62^\circ , \quad \hat{B} = 143^\circ$$

$$(٣) \quad \hat{B} = 62^\circ , \quad \hat{C} = 288^\circ , \quad \hat{A} = 288^\circ$$

$$(٤) \quad \hat{P} = 36^\circ , \quad \hat{B} = 5^\circ , \quad \hat{C} = 12^\circ$$

$$(٥) \quad \hat{C} = 9^\circ , \quad \hat{P} = 40.17^\circ , \quad \hat{A} = 200^\circ$$

$$(٦) \quad \hat{P} = 3^\circ , \quad \hat{B} = 4^\circ , \quad \hat{C} = 5^\circ$$

$$(٧) \quad \hat{P} = 9^\circ , \quad \hat{C} = 4356^\circ , \quad \hat{A} = 270.9^\circ$$

$$(٨) \quad \text{أوجد مساحة المثلث P ب ح الذي فيه } \hat{P} = 150^\circ , \quad \hat{B} = 42^\circ , \quad \hat{C} = 32^\circ$$

$$(٩) \quad \text{أثبت أنه لا يمكن رسم المثلث P ب ح الذي فيه } \hat{C} = 5^\circ \text{ سم} , \quad \hat{B} = 2^\circ \text{ سم} , \quad \hat{A} = 3^\circ$$

$$(١٠) \quad \text{حل المثلث المتطابق الضلعين الذي يكون قياس زاويته الرأسية } 24^\circ 14' \text{ وطول كل من}$$

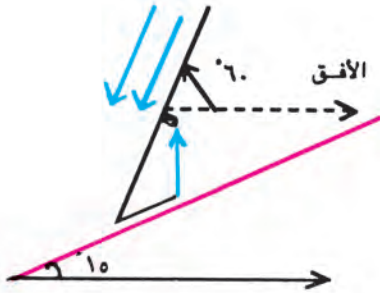
ضلعيه المتطابقين ٣٦ م

(١١) برهن أنه في أي مثلث P ب ح تتحقق العلاقة :

$$\text{حا} \frac{b-c}{p} = \frac{b-c}{p} \text{ حتا } \frac{p}{2}$$

ثم استخدم هذه العلاقة في حل المثلث إذا علم أن :

$$\hat{B} - \hat{C} = 8^\circ \text{ سم} , \quad \hat{P} = 37^\circ 8' \text{ سم} , \quad \hat{A} = 60^\circ$$



(١٢) رجل طوله ١٧٠ سم ، وقف منتصباً على أرض مستوية تميل على الأفق بزاوية قدرها 15° ، أوجد طول ظل الرجل على هذه الأرض إذا علمت أن زاوية ارتفاع الشمس في تلك اللحظة 60° .
(يطلب الحل في حالة الشكل المرسوم جانباً فقط) .

تمارين عامة

- (١) حول من تقدير ستيني إلى تقدير دائري : 320° ، 52° ، -80° ، 240°
- (٢) حول إلى تقدير ستيني : $\frac{3\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{12}$ ، $\frac{4\pi}{9}$ ، $\frac{7\pi}{12}$
- (٣) إذا كانت $P > M > N$ في وضع قياسي وتقطع قوساً طوله ٨ سم من دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم ، فأوجد القياس الدائري للزاوية $P > M > N$ حيث $0 < Q < (P > M > N) < 2\pi$
- (٤) إذا كان $h = \frac{4}{5}$ ، $0 < h < 180^\circ$ فأوجد :
- (P) حتا ه (ب) ظتا ه (ج) حا $(\frac{\pi}{4} - h)$
- (د) حتا $(-\frac{\pi}{4} + h)$ (هـ) حا $(\pi - h)$ (و) حتا $(\pi + h)$
- (ز) حا $(\frac{3\pi}{4} + h)$ (ح) حا $(\pi + h)$ (ط) ظا $(\pi + h)$
- (٥) أوجد قيمة كل مما يلي مستعينا بالآلة (أو بالجدول) إن احتاج الأمر :
- حا 240° ، حا 310° ، حتا 160° ، ظا 250° ، حتا 280°
- (٦) قيس ظل منثنة عندما كانت زاوية ارتفاع الشمس 30° ، ثم قيس الظل عندما كانت زاوية ارتفاع الشمس 60° ، فكان الفرق بين طولي الظلين ٣٠ م ، فما ارتفاع المنثنة ؟

أثبت صحة المتطابقات الآتية :

$$(11) \quad \frac{\text{حتا} - \text{حتاه} + \text{حا}^2}{\text{حاه} - \text{حاد} - \text{حتا}^2} = \frac{\text{حا}^2 + \text{حا} - \text{حا}^2}{\text{حا}^2 + \text{حا} - \text{حا}^2} = \text{ظا} \text{ ح}$$

$$(12) \quad \frac{\text{حا}^8 - \text{حا}^4}{\text{حا}^7 + \text{حا}^5} = \frac{\text{حا}^4(\text{حا}^4 - 1)}{\text{حا}^5(\text{حا}^2 + 1)} = \frac{\text{حا}^4(\text{حا}^2 - 1)(\text{حا}^2 + 1)}{\text{حا}^5(\text{حا}^2 + 1)} = \frac{\text{حا}^4(\text{حا}^2 - 1)}{\text{حا}^5} = \frac{\text{حا}^2 - 1}{\text{حا}}$$

$$(13) \quad \frac{\sqrt[3]{\text{حا}^3 + 2}}{4} = \frac{\text{حا}^{\frac{1}{3}} + \text{حا}^{\frac{1}{3}} + \text{حا}^{\frac{1}{3}}}{4} = \frac{\text{حا}^{\frac{1}{3}} + \text{حا}^{\frac{1}{3}} + \text{حا}^{\frac{1}{3}}}{4}$$

أوجد مجموعة الحل للمعادلات المثلثية الآتية (P) بالراديان ، (ب) بالدرجات .

$$(14) \quad \text{حتا} 2 + \text{حا}^2 + 2 = 0 \quad , \quad \text{حا} > 0 \quad , \quad \text{حا} > 2 \text{ ط}$$

$$(15) \quad \frac{2}{\sqrt{3}} \text{حتا}^2 - 2 = 0 \quad , \quad \text{حا} > 0 \quad , \quad \text{حا} > 2 \text{ ط}$$

$$(16) \quad \text{قا} 2 \text{ ح} - \text{قا} 2 \text{ ح} = 0 \quad , \quad \text{حا} > 0 \quad , \quad \text{حا} > 6 \text{ ط}$$

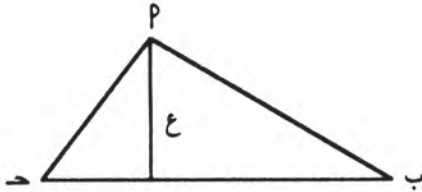
$$(17) \quad \text{حل المثلث P ب ح الذي فيه } \hat{\text{ح}} = 28^\circ 25' \quad , \quad \hat{\text{ب}} = 6^\circ \quad , \quad \hat{\text{ح}} = 5^\circ$$

$$(18) \quad \text{حل المثلث P ب ح الذي فيه } \hat{\text{P}} = 42^\circ \quad , \quad \hat{\text{ب}} = 12^\circ \quad , \quad \hat{\text{ح}} = 15^\circ$$

$$(19) \quad \text{حل المثلث P ب ح الذي فيه } \hat{\text{ح}} = 90^\circ \quad , \quad \hat{\text{ب}} = 56^\circ 8' \quad , \quad \hat{\text{ح}} = 217^\circ 5'$$

(20) في الشكل بجانبه أثبت أن :

$$\frac{\hat{\text{P}} \text{ حا} \text{ حاد}}{(\text{ب} + \text{ح}) \text{ حا}} = \text{ع}$$



ثم استخدم الآلة الحاسبة لحساب ع إذا كانت :

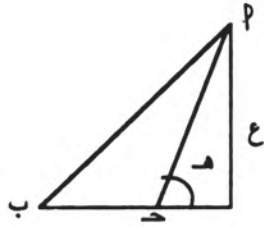
$$\hat{\text{P}} = 150^\circ \quad , \quad \hat{\text{ب}} = 75^\circ \quad , \quad \hat{\text{ح}} = 45^\circ$$

(٢١) في الشكل بجانبه أثبت أن :

$$\frac{\widehat{P} \text{ حاب حاه}}{\widehat{ح} \text{ا (هـ - ب)}} = \widehat{ع}$$

ثم استخدم الآلة الحاسبة لحساب ع

علماً بأن: $\widehat{P} = ١٠٠^\circ$ ، $\widehat{هـ} = ٨٠^\circ$ ، $\widehat{ب} = ٣٠^\circ$



(٢٢) P ب ح د شكل رباعي محدب ، قطره [ب د] يقسمه إلى مثلثين :

الأول : P ب د متطابق الضلعين ، فيه $|P ب| = |P د| = \sqrt{٢٧}$ سم ، $\widehat{س} = \widehat{س}$

والثاني : متطابق الأضلاع والمطلوب :

(١) أثبت أن مساحة الرباعي P ب ح د (بدلالة س) = $س + \sqrt{٣٧}٢$ حاه $\frac{س}{٢}$

(٢) عين قيمة س لتكون مساحة هذا الرباعي تساوي $٢\sqrt{٣٧}$ سم^٢ .

الأعداد المركبة

- ٤ - ١ نبذة تاريخية .
- ٤ - ٢ الحاجة إلى توسيع الأعداد الحقيقية .
- ٤ - ٣ الأعداد المركبة والعمليات عليها .
- ٤ - ٤ الخواص الجبرية للأعداد المركبة .
- ٤ - ٥ جذور المعادلة التربيعية .
- ٤ - ٦ التمثيل الهندسي للأعداد المركبة .
- ٤ - ٧ الجذور التكعيبية للعدد ١ .

من المعلوم أنه بين عامي (١٦٤ - ٢٣٥هـ) عاش في بغداد العالم المسلم محمد بن موسى الخوارزمي الذي برز في زمن خلافة المأمون ولعب في الرياضيات والفلك حتى عينه المأمون رئيساً لبيت الحكمة الذي يعتبر - آنذاك - من كبرى جامعات العالم الإسلامي ، يوم لم يكن في غير العالم الإسلامي جامعات ، وقد كتب الخوارزمي مؤلفه الشهير (كتاب الجبر والمقابلة) ولأول مرة في التاريخ ، صيغت كلمة (جبر) وظهرت تحت عنوان يدل به على علم : لم تتأكد استقلاليته بالاسم الذي خص به فقط ، بل ترسخ كذلك مع تصور لمفردات تقنية جديدة معدة للدلالة على الأشياء والعمليات (١)

والجدير بالذكر بالنسبة لموضوعنا ، أن الخوارزمي حل في كتابه هذا معادلات الدرجة الثانية وتطرق إلى وجود حالات ثلاث ، فإما أن يكون للمعادلة جذران مختلفان ، أو أن يكون لها جذران متساويان أو أن تكون المسألة مستحيلة (٢) ، وهذا مانعبر عنه اليوم بأن للمعادلة جذرين تخيليين وهكذا يكون الخوارزمي ، رحمه الله ، أول من نبه إلى الحالة التي يكمن فيها الجذر كمية تخيلية (٣) ، مما قاد من جاؤوا بعده من الغربيين ، الذين ورثوا علومنا ، إلى افتراض وجود أعداد تخيلية ، وذلك في القرن السادس عشر الميلادي ، (أي بعد الخوارزمي بثمانية قرون) ، ويبدو أن الأعداد التخيلية لم تلق اهتماماً إلا في القرن الثامن عشر عندما اكتشف العالم السويسري «أويلر» (Leonard Euler) - (١٧٠٧ - ١٧٨٣م) - وجود علاقة وثيقة بين الأعداد المركبة والدوال المثلثية تعرف بعلاقة أويلر ، والمعروف أن أويلر هذا أول من استعمل الرمز i (من كلمة imaginary - أي تخيلي) للدلالة على العدد $\sqrt{-1}$ ، وقد ترجمنا هذا الرمز إلى (ت) إلا أن

(١) انظر (تاريخ الرياضيات العربية بين الجبر والحساب) : د . رشدي راشد ، مركز دراسات الوحدة العربية - بيروت ١٩٨٩م

(٢) انظر (كتاب الجبر والمقابلة) ص ٢١ ط ١٩٦٨ تحقيق (د . مشرفة ، د . مرسى)

(٣) تاريخ العرب العلمي في الرياضيات والفلك - جامعة الدول العربية ط ١٩٦٣م ت . قدرى حافظ طوقان

الفضل - على ما يبدو - في تقديم الأعداد المركبة بالصورة $s + iy$ وتمثيلها بنقاط في المستوى لإحداثي يعود إلى الرياضي الألماني «غاوس» (Carl Gauss) (١٧٧٧ - ١٨٥٥ م) الذي أدرك دلالة هذه الأعداد في الجبر والهندسة .

٤ - ٢ الحاجة إلى توسيع الأعداد الحقيقية

أنت تعلم أن المعادلة : $s + ١ = ٠$ ليس لها حل في مجموعة الأعداد الطبيعية ط ، وقد كان هذا هو الدافع الأساسي لتوسيع هذه المجموعة بإضافة عناصر جديدة إليها (هي مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة) للحصول على مجموعة الأعداد الصحيحة ص، ولعلك تذكر أنه لما كانت ص لا تفي بالفرض عندما واجهتنا معادلات مثل المعادلة $s + ٢ = ٠$ ، كانت التوسعة من ص إلى مجموعة الأعداد النسبية ن لحل هذه المعادلة وأمثالها .

ولعلك تذكر أيضاً أن معادلة مثل : $s + ٢ = ٠$ ليس لها حل في ن لأن الجذر التربيعي للعدد ٢ (أي $\sqrt{٢}$) ليس عدداً نسبياً ، مما استوجب ضم هذا العدد وأمثاله من الأعداد غير النسبية إلى ن لتكوين مجموعة الأعداد الحقيقية ح .

لقد وجدنا أن مجموعة الأعداد الحقيقية ح ، بعمليتي الجمع والضرب المعروفتين ، أي النظام ذي العمليتين (ح ، + ، ،) ، تشكل ساحة واسعة للتعامل مع المعادلات الجبرية ، ولكنها هي الأخرى لاتخلو من قصور ، فالمعادلة : $s + ٢ = ٠$ (٤ - ١)

وهي من أبسط معادلات الدرجة الثانية ، ليس لها حل في ح ، مما حدا بمؤسس علم الجبر (الخوارزمي) أن يطلق على أمثالها : معادلة مستحيلة ، لأنه لا يوجد عدد حقيقي يكون مربعه مساوياً - ١ ، فمربع العدد الحقيقي هو دوماً أكبر من (أو يساوي) الصفر .

وهذا يقودنا بطبيعة الحال إلى البحث عن مجموعة أوسع من ح تحتوي حل المعادلة (٤ - ١) (وما كان على شاكلتها). المطلوب إذن توسيع مجموعة الأعداد الحقيقية ح بإضافة عناصر جديدة عليها لنحصل على مجموعة جديدة كـ نسميها مجموعة الأعداد المركبة تحقق الشروط التالية :

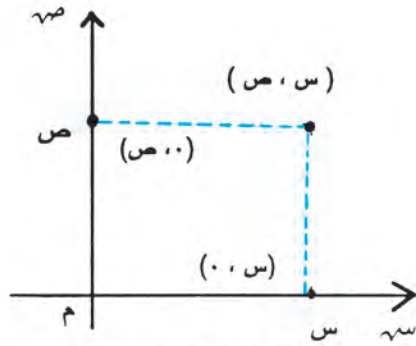
- ١ - أن تكون ح مجموعة جزئية من ك .
 ٢ - أن تكون عمليتا الجمع والضرب على ك امتداداً لعمليتي الجمع والضرب على ح .
 ٣ - أن يوجد عنصر ع \exists ك يحقق المعادلة (٤ - ١) .

٤ - ٣ مجموعة الأعداد المركبة والعمليات عليها

لو طلب منك التحقق من أن $\sqrt{-1}$ هو حل للمعادلة (٤ - ١) ، فغالباً ما تحاول تعويض هذه القيمة بالمتغير س في تلك المعادلة فتكتب :

$$\begin{aligned} 1 + \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} &= 1 + (\sqrt{-1})^2 \\ 1 + 1- &= \\ &= \text{صفرًا} \end{aligned}$$

مما يقودك إلى القول : إن $\sqrt{-1}$ هو أحد حلول هذه المعادلة لأنه حققها .
 وهذا مقبول من الناحية الشكلية ، غير أن الأمر ليس بهذه البساطة ، لأن العدد $\sqrt{-1}$ ليس عدداً حقيقياً ، ومن ثم ليس لنا أن نقول $1 - = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$ لأن العملية \times هي عملية الضرب التي ليس لدينا لها تعريف خارج المجموعة ح .
 وقد اتفق على تسمية $\sqrt{-1}$ عدداً تخيلياً ونرمز له بالرمز i كما أسلفنا في البند (٤ - ١) .
 وبالمثل : إذا عرفنا العدد المركب بأنه من الشكل : $s + vt$ حيث $s, v \in \mathbb{C}$ ،
 فإن الإشكال في هذا التعريف هو أنه يتضمن : عملية ضرب بين $t \notin \mathbb{C}$ و $v \in \mathbb{C}$
 للحصول على $v \cdot t$ كما يتضمن : عملية جمع بين $s \in \mathbb{C}$ ، $v \cdot t \notin \mathbb{C}$
 وليس لدينا تعريف لهاتين العمليتين خارج المجموعة ح ، ولحل هذا الإشكال ،
 سوف نعرف العدد المركب بأنه زوج مرتب من الأعداد الحقيقية .



شكل (١-٤)

وقد سبق لك أن تعرفت على الزوج المرتب (س، ص) من الأعداد الحقيقية بأنه عنصر من المجموعة $ح \times ح$ وأنه ممثل بنقطة من المستوي الإحداثي . ولعلك تذكر أن هناك تقابل بين مجموعة الأزواج المرتبة (س، ص) ونقاط المستوي ،

يقودنا إلى اعتبار المجموعة $ح \times ح$ ممثلة بالمستوي الهندسي بكامله .

فإذا قلنا إن كل زوج مرتب (س، ص) $\in ح \times ح$ هو عدد مركب فإن بإمكاننا تعريف تساوي العددين (س_١، ص_١) ، (س_٢، ص_٢) بأنه تساوي العددين س_١، س_٢ ، ص_١، ص_٢ وكذلك بين ص_١، ص_٢ أي أن :

$$(س_١، ص_١) = (س_٢، ص_٢) \iff (س_١ = س_٢، ص_١ = ص_٢)$$

كما نعرّف عمليتي الجمع \oplus والضرب \otimes على مجموعة الأعداد المركبة ك على النحو الآتي :

$$(س_١، ص_١) \oplus (س_٢، ص_٢) = (س_١ + س_٢، ص_١ + ص_٢) \quad (٢-٤)$$

$$(س_١، ص_١) \otimes (س_٢، ص_٢) = (س_١ س_٢، ص_١ ص_٢ - س_١ ص_٢ - س_٢ ص_١) \quad (٣-٤)$$

وباعتبار مجموعة الأعداد الحقيقية ممثلة بنقاط المحور السيني في المستوي الإحداثي ، فإن هذا

يقودنا إلى اعتبار العدد الحقيقي س مساوياً العدد المركب (س، ٠) أي أن :

$$(س، ٠) = س \quad \text{لكل } س \in ح \quad (٤-٤)$$

وهذا يعني أن مجموعة الأعداد الحقيقية ح هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد المركبة ك ،

ونحصل بذلك على :

$$س_١ \oplus س_٢ = (س_١، ٠) \oplus (س_٢، ٠) \quad \text{حسب (٤-٤)}$$

$$= (س_١ + س_٢، ٠) \quad \text{(لماذا ؟)}$$

$$(\text{لماذا ؟}) \quad s_2 + s_1 =$$

$$(0 , s_2) \otimes (0 , s_1) = s_2 \otimes s_1$$

$$(\text{لماذا ؟}) \quad s_2 \cdot s_1 =$$

مما يعني أن تعريف الجمع والضرب على ك هو امتداد لتعريف هاتين العمليتين على ح ،
وبوسعنا أن نكتب إذن :

$$(s_2 , s_1) + (s_2 , s_1) \oplus (s_2 , s_1) : \text{بدلاً من}$$

$$(s_2 , s_1) \cdot (s_2 , s_1) \otimes (s_2 , s_1) : \text{بدلاً من}$$

من جهة أخرى ، فلعلك تلاحظ أن :

$$(1 , 0) \cdot (1 , 0) = {}^2(1 , 0)$$

$$(\text{لماذا ؟}) \quad (0 , 1 -) =$$

$$1 - =$$

مما يعني أن (1 , 0) يحقق المعادلة (1 - 4)

مما سبق نستطيع تعريف مجموعة الأعداد المركبة على النحو الآتي :

تعريف (1 - 4)

يعرف نظام الأعداد المركبة (ك ، + ، 0) بأنه المجموعة ح × ح المزودة بعمليتي

الجمع والضرب المعرفتين بالمعادلتين :

$$(s_2 + s_1 , s_2 + s_1) = (s_2 , s_1) + (s_2 , s_1)$$

$$(s_2 \cdot s_1 , s_2 \cdot s_1) = (s_2 , s_1) \cdot (s_2 , s_1)$$

ملحوظة (٤-١)

(١) من المساواة $P = (0, P)$ لأي عدد حقيقي P ، نحصل على أن :

$$P = (س, ص) = (0, P) (س, ص)$$

$$= (P, س) (س, ص) \quad \text{لكل } P \supseteq ح, (س, ص) \supseteq ك$$

(٢) كما هي العادة سنتحدث عن مجموعة الأعداد المركبة $ك$ المكونة من الأزواج المرتبة

$$(س, ص) \text{ ونحن نعني بذلك النظام ذا العمليتين } (ك, +, 0)$$

ويسمى المستوي الإحداثي في تمثيله للأعداد المركبة : المستوي المركب .

(٣) مما سبق نستطيع أن نرمز للعدد المركب $(١, 0)$ بالرمز $ت$ حيث $ت^2 = -١$ ، $ت = \sqrt{-١}$

يسمى العدد المركب $ت$ عدداً تخيلياً ، ليس لأن هناك شكاً في وجوده ، ولكن للتأكيد على أنه لا ينتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية ، وحقيقة الأمر إن العدد $ت$ لا يتطلب خيالاً أوسع لتقبله مما تطلبه العدد السالب -١ في الانتقال من الأعداد الطبيعية $ط$ إلى الأعداد الصحيحة $ص$.

الصيغة الجبرية للعدد المركب :

لأي عدد مركب $(س, ص)$ نستطيع الآن ، استناداً إلى التعريف (٤-١) والمساواة

$$(٤-٤) ، أن نكتب :$$

$$(س, ص) = (س, 0) + (0, ص)$$

$$= ص(١, 0) +$$

$$= ص(٤-٥) + ص(٤-٤)$$

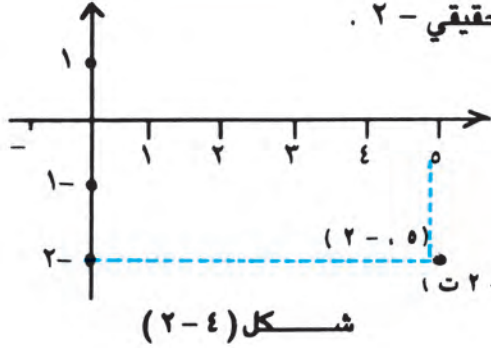
وبذلك نحصل على الصيغة $ص + ص(٤-٥)$ للعدد المركب $(س, ص)$.

يسمى $ص$ في الصيغة $(٤-٥)$ الجزء الحقيقي من العدد المركب $ص + ص(٤-٥)$

ويسمى $ص(٤-٥)$ ، الجزء التخيلي . فالجزء الحقيقي من العدد $(٥-٢)$ $ت$

هو العدد الحقيقي ٥ ، والجزء التخيلي هو العدد الحقيقي - ٢ .

انظر الشكل (٤ - ٢)



شكل (٤-٢)

مثال (٤ - ١) :

اكتب الأعداد التالية بالشكل $s + vt$.

$$(٥ - ، ٣) (٢ ، ١) ، (٥ - ، ٣) ، (٢ ، ١)$$

ثم مثلها في المستوي المركب .

الحل :

بالاستناد إلى المساواة (٥ - ٤) ، فإن :

$$٢ + ١ = (٢ ، ١) ت$$

$$٥ - ٣ = (٥ - ، ٣) ت$$

وبناء على التعريف (٤ - ١) ، فإن :

$$(٦ + ٥ - ، ١٠ + ٣) = (٥ - ، ٣) (٢ ، ١)$$

$$(١ ، ١٣) =$$

أي أن : $(٥ - ، ٣) (٢ ، ١) = ١٣ + ت$.

تدريب (٤ - ١)

$$\sqrt{3} - \sqrt{12} \times \sqrt{12} - \sqrt{2} ، \sqrt{18} - \sqrt{2} ، \sqrt{2} - \sqrt{2}$$

$$(٢) \text{ عبر عن العلاقة } (s_1, v_1) = (s_2, v_2) \iff s_1 = s_2, v_1 = v_2$$

باستخدام الصيغة الجبرية .

(٣) اكتب الأعداد المركبة بالصيغة : $s + vt$

$$^2(١ ، ٣) ، (٣ ، ٢-) ٥ ، (٠ ، ٠) ، (٠ ، ٥-) ، (٣ ، ٠)$$

(٤) اكتب الأعداد المركبة بشكل أزواج مرتبة

$$٥ ، ٥ ، ت + ٥ ، -٢ + ٢ ت$$

لنجرى الآن عمليتي الجمع والضرب بين $١ع$ و $٢ع$ بالشكل التالي :

$$١ع + ٢ع = (٢ + ٣ت) + (١ - ٥ت)$$

$$= (٢ + ١) + (٣ - ٥ت)$$

$$= ٣ - ٢ت$$

$$١ع ٢ع = (٢ + ٣ت)(١ - ٥ت)$$

$$= ٢(١ - ٥ت) + ٣ت(١ - ٥ت)$$

$$= ٢ - ١٠ت + ٣ت - ١٥ت^٢$$

$$= ٢ - ٧ت - ١٥ت^٢$$

نلاحظ أن النتيجة التي توصلنا إليها تتفق مع تعريف الجمع والضرب حسب

التعريف (٤ - ١) ، إذ أن :

$$(٢، ٣) + (١، -٥) = (٣، ٢) + (١، -٥)$$

$$= (٣ + ١، ٢ - ٥)$$

$$= (٤، -٣) = (١، -٥)(٣، ٢)$$

$$= (٤ - ١٥، -٣ + ١٠)$$

وبإمكان الطالب أن يتحقق من صحة المساواة في كل مما يلي :

$$(١) \quad ١ع + ٢ع = ٢ع + ١ع$$

$$(٢) \quad ١ع ٢ع = ٢ع ١ع$$

$$(٣) \quad (١ع + ٢ع) + ١ع = ٢ع + (١ع + ٢ع)$$

$$(٤) \quad (١ع ٢ع) ١ع = ٢ع (١ع ٢ع)$$

كما أن :

$$١ع (٢ع + ٣ت) = (٢ع + ٣ت) ١ع$$

$$= (٢ + ٣ت)(١ + ت)$$

$$= ٢ + ٢ت + ٣ت + ٣ت^٢$$

$$= ٢ + ٥ت + ٣ت^٢$$

$$\begin{aligned} (٦ ت) + (٢ + ٣ ت) + (٧ - ١٧ ت) &= ٣ع ١ع + ٣ع ١ع \\ ١٨ - ت ١٢ + ت ٧ - ١٧ &= \\ -١ + ٥ ت &= \end{aligned}$$

مما يعني أن :

$$(٥) ١ع = (٣ع + ٣ع) = ٣ع ١ع + ٣ع ١ع$$

وفيما يلي سنعمم النتائج التي توصلنا إليها في هذا المثال .

(أ) خواص التجميع والإبدال والتوزيع :

بصفة عامة إذا كان :

$$١ع = ١س + ١ص ت ، ٢ع = ٢س + ٢ص ت ، ٣ع = ٣س + ٣ص ت$$

أي ثلاثة أعداد مركبة ، فإننا باتباع الخطوات السابقة ، وسنترك تفاصيل ذلك للطالب ، نستنتج أن :

الإبدال في الجمع	(١) $١ع + ٢ع = ٢ع + ١ع$
الإبدال في الضرب	(٢) $١ع ٢ع = ٢ع ١ع$
التجميع في الجمع	(٣) $(٢ع + ٣ع) + ١ع = ٣ع + (٢ع + ١ع)$
التجميع في الضرب	(٤) $(٢ع ٣ع) ١ع = ٣ع (٢ع ١ع)$
توزيع الضرب على الجمع	(٥) $٣ع ١ع + ٢ع ١ع = (٣ع + ٢ع) ١ع$

وهذه الخواص متوافرة في النظام (ك ، + ، ٠) لأنها متوافرة في النظام (ح ، + ، ٠) .

تدريب (٤ - ٢)

تحقق من الخواص (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) ، (٥) أعلاه مستخدماً التعريف (٤ - ١) .

(ب) وجود العنصر المحايد :

إذا كان $P + b$ هو العنصر المحايد الجمعي ، فإن :

$$(s + t) + (P + b) = s + t \text{ لكل } s, t \text{ ولكن الطرف الأيمن}$$

من هذه المساواة هو $(s + P) + (t + b)$ ، مما يعني أن :

$$s + P = s \text{ ، } t + b = t$$

$$\Longleftarrow P = 0 \text{ ، } b = 0$$

أي أن العدد الحقيقي 0 ، وهو العنصر المحايد الجمعي في \mathbb{C} ، هو أيضاً العنصر المحايد الجمعي في \mathbb{K} .

وإذا كان $P + b$ هو العنصر المحايد الضربي في \mathbb{K} ، فإن :

$$(P + b)(s + t) = (s + t)(P + b) \text{ لكل } s, t \text{ ، وحيث إن الطرف}$$

الأيمن يساوي $(P + b)(s + t)$ ، فإن هذا يقتضي :

$$P(s + t) + b(s + t) = (s + t)P + (s + t)b$$

$$P \left(\frac{s+t}{s+t} \right) + b \left(\frac{s+t}{s+t} \right) = P + b$$

$$b \left(\frac{s+t}{s+t} \right) = b$$

أي أن العنصر المحايد الضربي في \mathbb{K} هو العدد الحقيقي 1 ، وهو أيضاً العنصر المحايد الضربي في \mathbb{C} كما تعلم .

تدريب (٤ - ٣)

عند إيجاد العنصر المحايد الجمعي وكذلك العنصر المحايد الضربي ، اكتفينا في إيجادها باستعمال معادلة واحدة لأن العملية إبدالية . أوجد العنصر المحايد الجمعي ، وكذلك الضربي باستعمال المعادلة الأخرى في كل مرة .

(ج) النظير الجمعي والنظير الضربي :

لأي عدد مركب $s + ص + ت$ يسمى العدد $ص + ت$ نظيره الجمعي إذا كان :

$$0 = (س + ص + ت) + (ص + ت)$$

$$0 = (س + ص) + (ص + ت) \leftarrow$$

$$0 = ص + ت ، 0 = ص + ص \leftarrow$$

$$ص - = ص ، س - = س \leftarrow$$

$$ص - = ص - س - (س + ص + ت) \leftarrow$$

كما أن النظير الضربي $ص + ت$ يحقق :

$$1 = (س + ص + ت) (ص + ت)$$

$$ص - = ص - س - (س + ص + ت) \leftarrow$$

وعندما يكون $s + ص + ت \neq 0$ فإن حل هاتين المعادلتين هو :

$$\frac{س}{ص + ت} = \frac{ص - س}{ص} \div \frac{ص - 1}{ص} = ص$$

$$\frac{ص}{ص + ت} = \frac{ص - س}{ص} \div \frac{1}{ص} = ص$$

وهذا يعني أن النظير الضربي للعدد $s + ص + ت$ هو :

$$(س + ص + ت)^{-1} = \frac{ص}{ص + ت} - \frac{س}{ص + ت} \quad (٤ - ٦)$$

تدريب (٤ - ٤)

استخدم الخواص الواردة في (P) ، (ب) ، (د) لإثبات أن :

(١) النظام (ك ، +) زمرة إبدالية .

(٢) النظام (ك* ، 0) زمرة إبدالية ، حيث ك* هي مجموعة الأعداد المركبة باستثناء الصفر .

(د) تعريف عمليتي الطرح والقسمة :

باستطاعتنا الان أن نعرف ناتج طرح العدد المركب

$$٢ع = ٢س + ١ص ت$$

من العدد المركب

$$١ع = ١س + ١ص ت$$

$$\text{بالشكل } (٢ع -) + ١ع = ٢ع - ١ع$$

حيث $٢ع -$ هو النظير الجمعي للعدد $٢ع$ ، أي أن :

$$ت (٢ص - ١ص) + (٢س - ١س) = (ت ٢ص + ٢س) - (ت ١ص + ١س)$$

وبالمثل نعرف ناتج القسمة $\frac{١ع}{٢ع}$ ، حيث $٢ع \neq ٠$ ، بالشكل :

$$\frac{١ع}{٢ع} = ١ع^{-١} \cdot ١ع$$

حيث $١ع^{-١}$ هو النظير الضربي للعدد $١ع$. ومن $(٦ - ٤)$ نحصل على :

$$\frac{١س + ١ص ت}{٢س + ٢ص ت} = (١س + ١ص ت) \cdot \left(\frac{٢ص}{٢ص + ٢س} - \frac{٢س}{٢ص + ٢س} \right)$$

$$(٧ - ٤) \quad = \frac{١س + ١ص ت}{٢ص + ٢س} + \frac{٢ص ١ص - ٢س ١ص}{٢ص + ٢س}$$

تعريف (٢ - ٤)

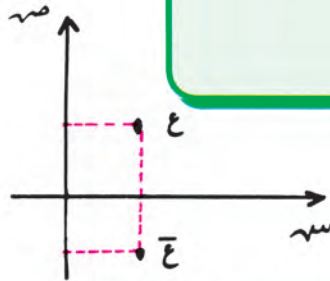
لأي عدد مركب $ع = ١س + ١ص ت$ يسمى العدد المركب $س - ص ت$

مرافقاً للعدد $ع$ ويرمز له بالرمز $\bar{ع}$

لاحظ أن $\bar{ع}$ هو صورة $ع$ بالتناظر حول محور الأعداد الحقيقية

كما في شكل $(٤ - ٤)$ ، وأن

$$ع \bar{ع} = (١س + ١ص ت) (١س - ١ص ت) = ٢س + ٢ص < ٠$$



شكل (٤ - ٤)

بهذا يمكن الحصول على المساواة (٤ - ٧) بضرب كل من بسط ومقام العدد $\frac{١ع}{٢ع}$ في مرافق المقام :

$$\frac{(س١ + ت١) (س٢ - ت٢)}{(س٢ - ت٢) (س١ + ت٢)} = \frac{س١ + ت١}{س٢ + ت٢}$$

$$= \frac{١}{س٢ + ت٢} (س١ + ت١) (س٢ - ت٢)$$

لاحظ أيضا أن $ع٢ \neq ٠$ إذا كان $ع٢ \neq ٠$ وبصفة خاصة فإن :

$$س١ + ت١ \neq ٠, \frac{س١ - ت١}{س٢ + ت٢} = \frac{١}{س١ + ت١} = ١^- (س١ + ت١) \text{ بما يتفق مع (٤ - ٦) .}$$

مثال (٤ - ٣) :

$$\text{باعتبار } ع١ = ١ + ٢ ت$$

$$ع٢ = ٣ - ت$$

$$\text{أوجد } ع١^- , ع١ع$$

الحل :

$$ع١^- = \frac{١}{ع١}$$

$$= \frac{١}{١ + ٢ ت}$$

$$ع١ع = \frac{١ - ٢ ت}{٢٢ + ٢١}$$

بضرب كل من البسط والمقام في $ع١ = ١ - ٢ ت$

$$= \frac{١}{٢} - \frac{٢}{٥} ت$$

$$ع١ع = \frac{١ع}{ع٢ - ٣}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(ت+٢)(ت+١)}{٢١+٢٣} = \\ & \text{بضرب كل من البسط والمقام في } \bar{ع} = ت + ٢ \\ & \frac{٦+١}{١٠} + \frac{٢-٢}{١٠} = \\ & \frac{٧}{١٠} + \frac{١}{١٠} = \end{aligned}$$

تدريب (٤ - ٥)

أثبت أن (P) $\bar{ع} = \overline{٢ع}$ لأي $١ع, ٢ع \in \mathbb{K}$

(ب) $\frac{1}{ع} = \left(\frac{1}{\bar{ع}}\right)$ لكل $ع \neq ٠$

(د) $\bar{ع} = ع$ لكل $ع \in \mathbb{K}$

تمارين (٤ - ٢)

(١) ضع المقادير التالية في الصورة $س + ص ت$

(P) $\frac{1}{ت+١}$ (ب) $\frac{ت+١}{ت-١}$ (د) $\frac{١}{ت-١} - \frac{١}{ت+١}$ (ج) $\frac{٢(ت+١)-١}{ت٢-٣}$

(٢) على افتراض أن $ع = س + ص ت$ بسّط المقادير التالية :

(P) $\bar{ع} + ع$ (ب) $ع - \bar{ع}$ (د) $٢\bar{ع} - ٢ع$ (ج) $\frac{\bar{ع}}{ع}$

(٣) أثبت أن الجزء الحقيقي للعدد المركب $ع$ يساوي $\frac{1}{٣}(\bar{ع} + ع)$

وأن الجزء التخيلي هو $\frac{1}{٣}(ع - \bar{ع})$.

(٤) أثبت أن مرافق $\bar{ع}$ هو $\bar{\bar{ع}}$ ، أي أن $\bar{\bar{ع}} = ع$.

(٥) ضع الأعداد التالية في الصورة $س + ص ت$

(P) $ت^٤$ (ب) $ت^٥$ (د) $ت^٨$ (ج) $ت^٧$ (هـ) $ت^{١٠}$
 (و) $ت^{٤ن}$ (حيث $ن \in \mathbb{Z}$) (ز) $ت^{٤ن+١}$ (ح) $ت^{٤ن+٢}$ (ط) $ت^{٤ن+٣}$

إرشاد: لاحظ أن $t^{n+1} = t^n \cdot t$ وأن $t^n = t^n \cdot 1$ لكل n ، \Rightarrow ط .

(٦) ضع المقادير التالية في الصورة $س + ص ت$

$$(٢) (t + \sqrt{2}) (t - \sqrt{2})$$

$$(ب) \frac{t+2}{t-1} + \frac{t+2}{t+1}$$

$$(ج) \frac{(t-2)(t+7)}{t+3}$$

$$(د) \left(t - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(t - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$(هـ) \left(t - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4$$

(٧) احسب ناتج القسمة $\frac{١ع}{٢ع}$ في كل من الحالات التالية :

$$(٢) ١ع + \sqrt{2} = ٢ع$$

$$(ب) ١ع = ت$$

$$(ج) ١ع = ١$$

(٨) هل $ت = ع$ هو الحل الوحيد للمعادلة $٢ع = ١ - ١$ ؟ علل إجابتك .

(٩) أوجد طول المعادلة $٤ع = ١$ في ك .

(١٠) أثبت أن المجموعة $\{١, -١, ت, -ت\}$ بعملية الضرب المعرفة على ك

هي زمرة دائرية مولدها العدد ت .

٤ - ٥ جذور المعادلة التربيعية

لو كانت الثمرة الوحيدة من إنشاء نظام الأعداد المركبة هو حل المعادلة $س + ١ = ٠$ ، لما استحققت منا الأعداد المركبة كل هذا الاهتمام . ولكن الحقيقة هي أن النظام (ك ، + ، ،)

يفتح لنا آفاقاً جديدة في حل المعادلات الجبرية ، ويسد ثغرات كثيرة كانت موجودة في هذا الموضوع . فلننظر إلى الأمثلة التالية :

(أ) حل المعادلات في ك

مثال (٤ - ٤) :

$$\text{أوجد جنور المعادلة } ٤ - ٦ع + ١٣ = ٠$$

الحل :

بإكمال المربع على ع ، نحصل على :

$$(٣ - ع)^2 = ٩ - ١٣ = -٤$$

$$\sqrt{٤ - ٦ع + ١٣} \pm ٣ = ٣ - ع \quad \leftarrow$$

$$\sqrt{٤ - ٦ع + ١٣} \pm ٣ = ع \quad \leftarrow$$

وهي النتيجة نفسها التي نحصل عليها باستخدام قانون حل معادلة الدرجة الثانية :

$$ع = \frac{٦ \pm \sqrt{٣٦ - ٥٢}}{٢}$$

$$ع = ٣ \pm \sqrt{٤ - ٦ع + ١٣}$$

$$ع - ٣ = \pm \sqrt{٤ - ٦ع + ١٣}$$

$$ع - ٣ = ٢$$

$$ع = ٥ \quad \text{حيث } ٥ = ٣ + ٢$$

نستنتج إذن أن للمعادلة جذرين هما $٣ + ٢$ ، $٣ - ٢$.

وباستطاعة الطالب أن يتحقق من ذلك بالتعويض في المعادلة .

(لاحظ أن هذه المعادلة لا يوجد لها جنور حقيقية) .

والمثال التالي تعميم لما سبق :

مثال (٤ - ٥) :

أوجد جنود معادلة الدرجة الثانية :

(٨ - ٤)

$$٠ = ٢ع + ب + د$$

حيث $٢, ب, د$ أعداد حقيقية، $٢ \neq ٠$.

الحل :

من قانون حل معادلة الدرجة الثانية

(٩ - ٤)

$$ع = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٢د}}{٢}$$

نميز بين ثلاث حالات تحددها إشارة المقدار $ب^2 - ٢د$.

الحالة الأولى : $ب^2 - ٢د < ٠$.

في هذه الحالة يكون للمعادلة جذران حقيقيان هما :

$$\frac{-ب - \sqrt{ب^2 - ٢د}}{٢} , \frac{-ب + \sqrt{ب^2 - ٢د}}{٢}$$

الحالة الثانية : $ب^2 - ٢د = ٠$.

عندئذ يكون للمعادلة جذر واحد هو العدد الحقيقي $-\frac{ب}{٢}$.

الحالة الثالثة : $ب^2 - ٢د > ٠$.

في هذه الحالة نلاحظ أن :

$$\sqrt{ب^2 - ٢د} = \sqrt{٢(٢ - ب)}$$

$$= \sqrt{٢} \sqrt{٢ - ب}$$

$$= \sqrt{٢} \sqrt{٢ - ب}$$

حيث $\sqrt{٢٤ - ح - ٢ب} < ٢٤ - ح - ٢ب$ عدد حقيقي لأن $٢٤ - ح - ٢ب > ٠$.

فيترتب على ذلك أن للمعادلة (٤ - ٨) جذرين مركبين ، هما :

$$ت = \frac{\sqrt{٢٤ - ح - ٢ب}}{٢٢} - \frac{ب - ٢٤}{٢٢} ، \quad ت = \frac{\sqrt{٢٤ - ح - ٢ب}}{٢٢} + \frac{ب - ٢٤}{٢٢}$$

بناء على ذلك بإمكاننا أن نبدي الملاحظات التالية على حلول المعادلة (٤ - ٨)

(١) لمعادلة الدرجة الثانية جذر واحد على الأقل ، أو جذران على الأكثر في ك .

(٢) جذرا المعادلة (٤ - ٨) المركبان مترافقان .

(٣) للمعادلة $٢ + ١ = ٠$ جذران تخيليان هما $٢ + ت$.

تدريب (٤ - ٦)

(١) حل في ك كلاً من المعادلات الآتية :

$$١ = ٣ع \quad (ب) \quad ٠ = ١ + ع + ٢ع \quad (٢)$$

$$٠ = ٣ + ع\sqrt{٢} \quad (د) \quad ٨١ = ٤ع \quad (ح)$$

(٢) كَوِّنْ معادلة من الدرجة الثانية عرف جذراها كما يأتي :

$$(٢) \text{ الجذران : } \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} \text{ ت ، } \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢} \text{ ت}$$

$$(ب) \text{ الجذران هما : } \sqrt{٣} - ت ، \sqrt{٣} + ت .$$

(٣) ماهو الجذر الآخر لمعادلة من الدرجة الثانية أحد جذريها $\sqrt{٥} - ٢$ ت ؟ وماهي المعادلة ؟

(ب) إيجاد الجذور التربيعية للعدد المركب :

مثال (٤ - ٥) :

احسب الجذور التربيعية للعدد $٣ + ٤$ ت

الحل :

على افتراض أن $s + t$ هي الصورة العامة للجذر التربيعي ، فإن :

$$(s + t)^2 = 4 + 3t$$

$$s^2 - 2st + 2t^2 = 4 + 3t$$

$$\leftarrow s^2 - 2st + 2t^2 - 3t = 4$$

نستنتج من المعادلة الثانية أن $s \neq 0$ ، $t \neq 0$. وبتعويض $s = \frac{2}{t}$ في المعادلة

الأولى نجد أن :

$$s^2 - 2\left(\frac{2}{t}\right)t + 2t^2 - 3t = 4$$

بعد الضرب في s^2 وإعادة الترتيب

$$s^4 - 4s + 2s^2t^2 - 3st = 4s^2$$

بعد تحليل الطرف الأيمن

$$s^4 - 4s + 2s^2t^2 - 3st = 4s^2$$

$$\leftarrow s^4 - 4s + 2s^2t^2 - 3st - 4s^2 = 0$$

مما يعني أن : $s = 2$ ، $s = -2$ أو $s = 1$ ، $s = -1$

ولكن بما أن s عدد حقيقي ، نستبعد الحالة $s = 1$ ، $s = -1$

في حالة $s = 2$ تكون $s = \frac{2}{t} = 1$ ، وفي حالة $s = -2$ تكون $s = \frac{2}{t} = -1$

إذن للعدد $4 + 3t$ جذران تربيعيان هما $\pm(2 + t)$.

تدريب (٤ - ٧)

تحقق من نتيجة المثال (٤ - ٥) بتربيع كل من الجذرين .

مثال (٤ - ٦) :

أوجد الجذور التربيعية للعدد - ت

الحل :

افرض أن $s + t$ هي الصورة العامة للجزر التربيعي ، إذن :

$$t = (s + t)^2 - s^2$$

$$t = (s^2 + 2st + t^2) - s^2$$

$$\leftarrow s^2 - 2st + t^2 = 0 \quad , \quad 2st = s^2 - t^2$$

من المعادلة الثانية نحصل على $s = \frac{1}{2s} - \frac{1}{2s}$ فنعووض في :

$$\frac{1}{4} = s^2 \quad , \quad 0 = \frac{1}{2s} - \frac{1}{2s}$$

$$\leftarrow s = \frac{1}{2} \quad , \quad \text{وقد استبعدنا } s = -\frac{1}{2} \text{ لأن } s \in \mathbb{C}$$

$$\leftarrow s = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = s \quad \text{عندما} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = t \quad \text{فإن} \quad s = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = s \quad \text{عندما} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} = t \quad \text{فإن} \quad s = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ إذا جذرا العدد } -t \text{ هما :}$$

تدريب (٤ - ٨)

(١) تحقق من نتيجة المثال (٤ - ٦) بتربيع كل من الجذرين :

(٢) أوجد الجذور التربيعية للأعداد الآتية :

$$(٢) \quad 4 + 3 - t \quad (ب) \quad 12 - 5 \quad (ج) \quad 8 - 6 - t \quad (د) \quad 1 + \sqrt{3} - t$$

تمارين (٤ - ٣)

أوجد جذور المعادلات التالية :

$$(٢) \quad 0 = 2 + 4e + 3e^2$$

$$(١) \quad 0 = 9 + 2e$$

$$(٤) \quad \frac{9}{4} - 3e = 2e^2$$

$$(٣) \quad 0 = 1 + e + 2e^2$$

استخرج الجذور التربيعية لكل من المقادير التالية :

(٥) ت

$$(٦) \frac{\sqrt{3}}{٤} + \frac{١}{٤} ت$$

(٧) ٤ - ٣ ت

أوجد قيم س و ص الحقيقيتين في كل من المعادلات التالية :

$$(٨) (٤ + ٣ ت) (س - ص ت) = ١$$

$$(٩) (١ - ت) (س + ص ت) = ٢٥ (ت + ١)$$

أوجد س ، ص \Rightarrow ح التي تحقق المعادلة

$$(١٠) (س + ص ت) (س - ص ت) = ٠$$

$$(١١) (س + ص ت) (س - ص ت) = ١$$

(١٢) أوجد جميع جذور المعادلة $٤ع^٣ + ٢ع + ١ = ٠$

$$(١٣) \text{أوجد } ع \text{ التي تحقق } ٢ع + \frac{١}{٢ع} = ٢$$

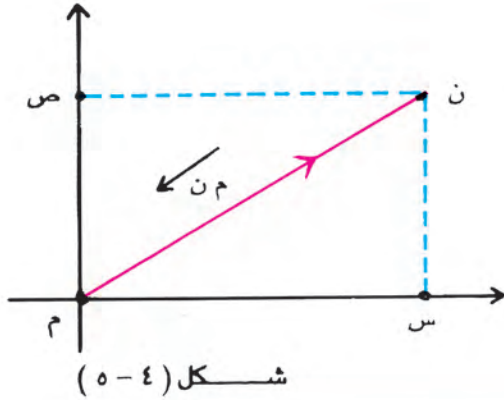
$$(١٤) \text{أوجد } ع \text{ التي تحقق } ٢ع + \frac{٢}{٢ع} = ١$$

٤ - ٦ التمثيل الهندسي للأعداد المركبة

(أ) القيمة المطلقة للعدد المركب

أشرنا في البند (٤-٣) إلى إمكانية تمثيل العدد المركب $س + ص ت$ بالنقطة $ن = (س ، ص)$

في المستوي الإحداثي .



ولكن النقطة ن في المستوى تحدد قطعة
المستقيم الموجهة من نقطة الأصل
م = (٠ ، ٠) إلى ن ، والتي يرمز لها
بـ \vec{MN} وتسمى متجهاً من م إلى ن .
وعليه فإن المتجه \vec{MN} هو ممثل آخر للعدد
المركب $س + ص ت$

تعريف (٣-٤)

القيمة المطلقة للعدد المركب $ع = س + ص ت$ ، والتي يرمز لها بالرمز $|ع|$ ،

$$\text{تعرف بأنها } |ع| = \sqrt{س^2 + ص^2}$$

يتضح من هذا التعريف أن القيمة المطلقة للعدد المركب هي عدد حقيقي غير سالب ،
وإذا كان العدد المركب ع ممثلاً بالمتجه \vec{MN} فإن $|ع|$ تساوي طول المتجه \vec{MN} حسب
نظرية فيثاغورس ، أي المسافة بين م ون ، كما هو واضح من الشكل (٤-٦) .

وبما أن : $ع \bar{ع} = (س + ص ت) (س - ص ت)$

$$= س^2 + ص^2$$

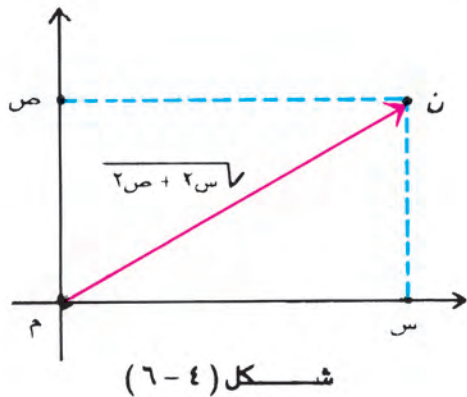
$$\text{فإن : } \sqrt{ع \bar{ع}} = |ع|$$

$$\bar{ع} = \frac{1}{ع}$$

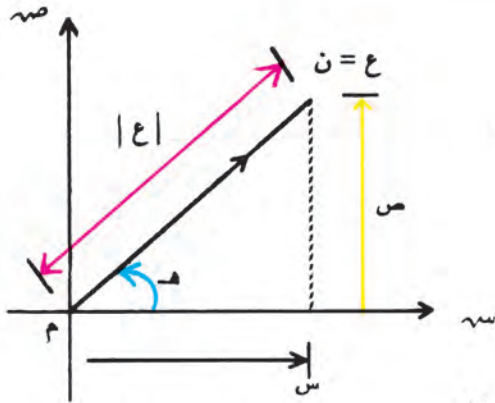
وتأخذ الصيغتان (٤-٦) و (٤-٧) الشكل التالي

$$\frac{\bar{ع}}{|ع|} = 1 - ع = \frac{1}{ع}$$

$$\frac{\bar{ع} \cdot ع}{|ع| \cdot |ع|} = \frac{1}{|ع|^2}$$



(٤-١٠)



شكل (٧-٤)

$$\cdot |z| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} \quad \text{وأن } |z| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$$

(ب) الصيغة المثلثية للعدد المركب :

سبق أن أشرنا إلى إمكانية تمثيل العدد المركب

$$z = \sigma + j\omega$$

في المستوي الإحداثي بالنقطة z ذات الإحداثي

السيني σ والصادي ω . والآن سنتعرف على طريقة

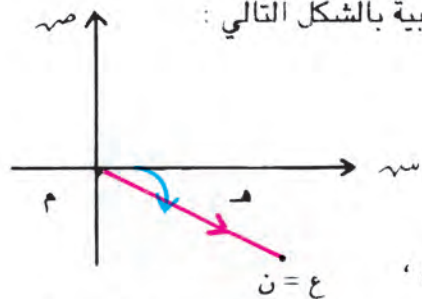
أخرى للتعبير عن z . انظر إلى الشكل (٧ - ٤) ولاحظ أن :

$$\sigma = |z| \cos \phi$$

$$\omega = |z| \sin \phi$$

حيث ϕ هي الزاوية المحصورة بين نصف المستقيم $[\sigma]$ ونصف المستقيم $[\omega]$ ، فهي تحدد الدوران الذي يحول $[\sigma]$ إلى $[\omega]$ وسنتفق على اعتبار ϕ موجبة إذا كان هذا الدوران في عكس اتجاه عقارب الساعة ، وسالبة إذا كان في اتجاه عقارب الساعة . ففي الشكل (٧ - ٤)

نلاحظ أن $\phi < 0$. بينما $\phi > 0$. في الشكل (٨ - ٤) تسمى ϕ الزاوية القطبية للعدد المركب z . وبوسعنا الآن أن نعبر عن z بدلالة القيمة المطلقة والزاوية القطبية بالشكل التالي :



شكل (٨-٤)

تسمى هذه الصيغة الأخيرة بالصيغة المثلثية للعدد المركب z ،

كما تسمى الصيغة $\sigma + j\omega$ بالصيغة الديكارتية (أو الجبرية)

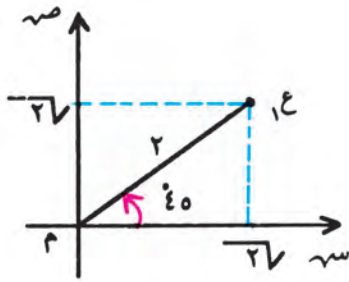
مثال (٧٤) :

ضع العدد المركب في كل من الحالات التالية في الصيغة الديكارتية :

$$(١) |z| = ٢ ، \arg z = ٤٥^\circ$$

$$(٢) |z| = ١ ، \arg z = ٢٧٠^\circ$$

$$(٣) |z| = ١ ، \arg z = ٩٠^\circ -$$



شكل (٩-٤)

الحل :

$$(١) |z| = ٢ (\cos ٤٥^\circ + j \sin ٤٥^\circ)$$

$$= ٢ (\cos ٤٥^\circ + j \sin ٤٥^\circ)$$

$$= ٢ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= \sqrt{2} + j\sqrt{2}$$

$$(٢) |z| = ١ (\cos ٢٧٠^\circ + j \sin ٢٧٠^\circ)$$

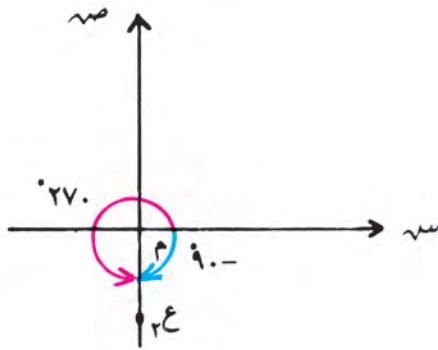
$$= \cos ٢٧٠^\circ + j \sin ٢٧٠^\circ$$

$$= -j$$

$$(٣) |z| = ١ (\cos ٩٠^\circ - + j \sin ٩٠^\circ -)$$

$$= \cos ٩٠^\circ - + j \sin ٩٠^\circ -$$

$$= -j$$



شكل (١٠-٤)

نلاحظ في هذا المثال أن :

$\arg z = \arg w$ بالرغم من أن $\arg z \neq \arg w$ ، أي أن العدد المركب له أكثر من زاوية قطبية واحدة .

ولكن إذا اشترطنا أن تكون $0 < \arg z < ٣٦٠^\circ$ فإن كل عدد مركب يصبح له زاوية قطبية واحدة ،

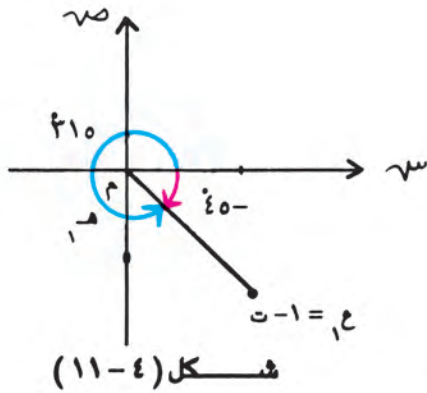
كما يتضح من المثال التالي :

مثال (٤-٨) :

أوجد الزوايا القطبية لكل من الأعداد المركبة التالية في الفترة [٠ ، ٣٦٠) ومن ثم ضع العدد في الصيغة المثلثية :

(١) $١ - i$ (٢) $٧ - i$ (٣) $١ - i\sqrt{3}$

الحل :



(١) $|١ - i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\sqrt{2}$

بما أن : $١ - i = \sqrt{2}$

$\sqrt{2} = (\cos \theta + i \sin \theta)$

فإن : $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

ومن الشكل (٤ - ١١) واضح أن الحل الوحيد لهاتين المعادلتين في [٠ ، ٣٦٠) هو :

$\theta = ٣١٥$

وبالتالي : $١ - i = \sqrt{2} (\cos ٣١٥ + i \sin ٣١٥)$

(٢) $|٧ - i| = \sqrt{7^2 + (-1)^2} = \sqrt{50}$

$\sqrt{50}$

$٧ - i = \sqrt{50}$

$\sqrt{50} = (\cos \theta + i \sin \theta)$

$\sqrt{50} = (\cos \theta + i \sin \theta)$

$\cos \theta = \frac{7}{\sqrt{50}}$ ، $\sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{50}}$ ، $0 < \theta < ٣٦٠$

$\theta = ١٨٠$

$\sqrt{50} = (\cos ١٨٠ + i \sin ١٨٠)$

$$\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = |r_e| \quad (2)$$

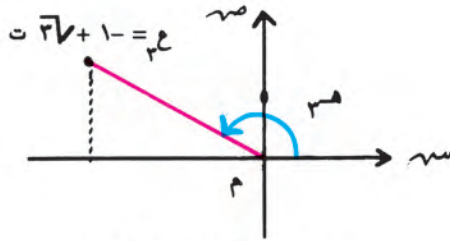
$$2 =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = r_e \cos \theta, \quad \frac{1}{2} = r_e \sin \theta$$

$$36.0^\circ > \theta \geq 0$$

$$120^\circ = \theta \leftarrow$$

$$(2) = r_e (\cos 120^\circ + j \sin 120^\circ) \leftarrow$$



شكل (٤-١٣)

تدريب (٤-١٠)

(١) اكتب بالصيغة المثلثية كلاً من الأعداد المركبة الآتية :

$$2 = e, \quad 5 = e, \quad 6 = e, \quad 2 - = e, \quad \sqrt{3} + = e, \quad -1 = e, \quad -1 - = e, \quad -1 + = e$$

(٢) اكتب العدد المركب بالصيغة : $s + jt$ إذا كان :

$$(P) |e| = \sqrt{2}, \quad \angle = 225^\circ \quad (B) |e| = \sqrt{3}, \quad \angle = 120^\circ$$

(ج) التفسير الهندسي لعملية الجمع $e_1 + e_2$

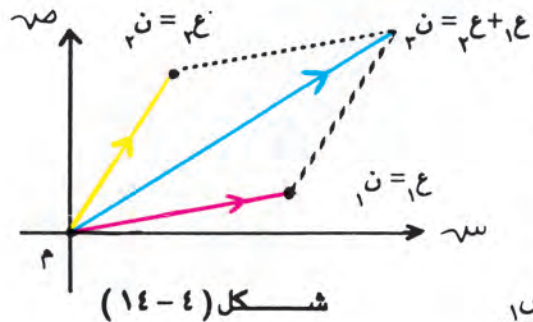
(P) لنفرض أن العددين المركبين

$$e_1 = s_1 + jt_1$$

$$e_2 = s_2 + jt_2$$

ممثلان بالنقطتين

$$N_1 (s_1, t_1), \quad N_2 (s_2, t_2)$$



على الترتيب . إذن المجموع

$$ت (٢ص + ١س) + (٢ص + ١س) = ٢ع + ١ع$$

$$\text{ممثل بالنقطة } ٣ (٢ص + ١س , ٢ص + ١س)$$

الآن لاحظ أن :

$$\frac{١ص}{١س} = \text{ميل المستقيم م ن } ١ = \text{ميل المستقيم ن } ٢$$

$$\frac{٢ص}{٢س} = \text{ميل المستقيم م ن } ٢ = \text{ميل المستقيم ن } ١$$

فنستنتج من ذلك أن م ن // ن ٢ ، م ن // ن ١ ، وأن الشكل الرباعي م ن ١ ن ٢ متوازي أضلاع . أي أن مجموع العددين ١ع ، ٢ع ممثل بالرأس الرابع لمتوازي الأضلاع الذي رؤوسه الأخرى هي ن ١ ، م ، ن ٢ ، كما هو واضح من الشكل (١٤ - ٤) .

(د) أما التفسير الهندسي لعملية الضرب ٢ع ١ع

فتتضح بشكل جلي إذا عبرنا عن ١ع ، ٢ع

بالصيغة المثلثية :

$$١ع = |١ع| (\text{جتا } ١هـ + \text{ت جا } ١هـ)$$

$$٢ع = |٢ع| (\text{جتا } ٢هـ + \text{ت جا } ٢هـ)$$

$$\left\langle \left[|٢ع| |١ع| (\text{جتا } ١هـ \text{جتا } ٢هـ - \text{ت جا } ١هـ \text{ت جا } ٢هـ) \right] \right\rangle$$

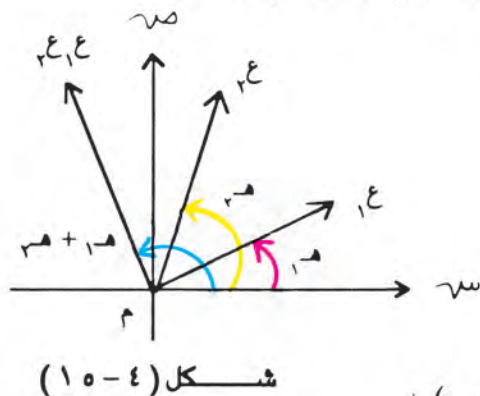
$$\text{ت} (\text{جتا } ١هـ \text{جا } ٢هـ + \text{جا } ١هـ \text{جتا } ٢هـ)$$

ومن المتطابقتين (٣ - ١٨) ، (٣ - ٢٠) نجد :

$$\text{جتا } ١هـ \text{جتا } ٢هـ - \text{جا } ١هـ \text{جا } ٢هـ = \text{جتا } (١هـ + ٢هـ)$$

$$\text{جتا } ١هـ \text{جا } ٢هـ + \text{جا } ١هـ \text{جتا } ٢هـ = \text{جا } (١هـ + ٢هـ)$$

وبذلك تأخذ الصيغة (٤ - ١١) الشكل :



(٤ - ١٢)

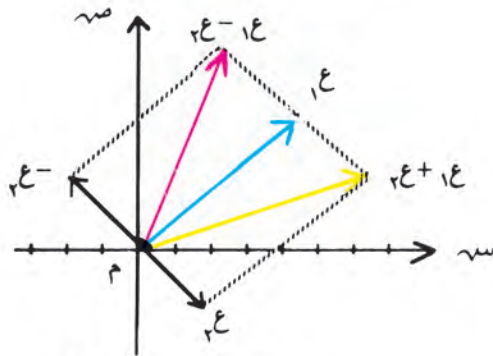
$|r_1| |r_2| = |r_1 + r_2| [\cos(\theta_1 + \theta_2) + \cos(\theta_1 - \theta_2)]$ (٤-١٣)
 أي أن حاصل الضرب $r_1 r_2$ ممثل بالمتجه الذي طوله يساوي حاصل ضرب الطولين
 $|r_1| |r_2|$ وزاويته القطبية هي مجموع الزاويتين θ_1, θ_2

مثال (٤-٩) :

استخدم الرسم للحصول على : $r_1 + r_2, r_2 - r_1, r_1 - r_2$
 باعتبار $r_1 = 2 + 3i, r_2 = -3 + 2i$

الحل :

يوضح الشكل (٤-١٦) أن $r_1 + r_2$ هو الرأس الرابع لمتوازي الأضلاع الذي رؤوسه



شكل (٤-١٦)

محددة بـ $r_1, r_2, r_1 - r_2$

كما أن $r_2 - r_1 = r_2 + (-r_1)$

هو الرأس الرابع لمتوازي الأضلاع

الذي رؤوسه الأخرى هي $r_1, r_2, r_1 - r_2$

وللحصول على $r_1 r_2$ نلاحظ أن :

$$|r_1| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$|r_2| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\theta_1 = 56.3^\circ \quad (\text{لماذا؟})$$

$$\theta_2 = 33.0^\circ \quad (\text{لماذا؟})$$

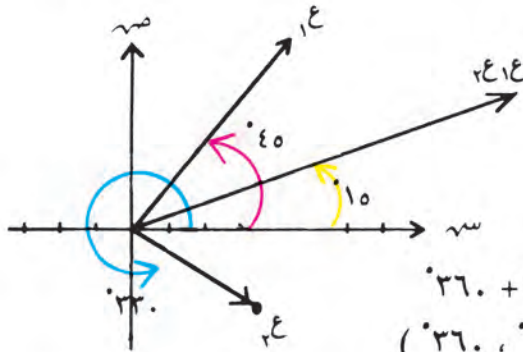
إذن $r_1 r_2$ ممثل بالمتجه الذي طوله

$$|r_1 r_2| = \sqrt{13 \cdot 5} = \sqrt{65}$$

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = 56.3^\circ + 33.0^\circ = 89.3^\circ = 90^\circ - 0.7^\circ$$

لاحظ أن الزاوية التي تمثل $r_1 + r_2$ في الفترة $[0^\circ, 360^\circ)$

هي $\theta = 90^\circ - 0.7^\circ$ كما هو واضح من الشكل (٤-١٧).



شكل (٤-١٧)

(١) في المثال (٤ - ٩) أوجد المتجه الذي يمثل العدد المركب $e - e_1$ ثم تحقق من أن :

$$e - e_1 = -(e_1 - e) \text{ مستخدماً الرسم .}$$

(٢) إذا كان $e_1 = |e|$ (حتا e_1 + ت e_1 هـ) ، $e_2 = |e|$ (حتا e_2 + ت e_2 هـ) ،

$$e_3 = |e| \text{ (جتا } e_3 \text{ + ت } e_3 \text{ هـ) فاثبت أن}$$

$$e_1 \cdot e_2 \cdot e_3 = |e| \cdot |e| \cdot |e| \text{ (حتا } e_1 \text{ + } e_2 \text{ + } e_3 \text{ هـ)}$$

ت e_1 ($e_1 + e_2 + e_3$)

إرشاد : لاحظ أن : $e_1 \cdot e_2 \cdot e_3 = e_1 \cdot (e_2 \cdot e_3) = e_1 \cdot e_3$. ثم طبق (٤ - ١٣) مرتين .

(٣) أوجد ناتج $2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3} \right) \times 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + j \sin \frac{\pi}{6} \right)$

(٣) قانون دي موافر:

من الصيغة المثلثية (٤ - ١٣) لحاصل الضرب $e_1 e_2$ نستخلص أنه إذا كان :

$$e = |e| \text{ (جتا } e \text{ + ت } e \text{ هـ)}$$

(٤ - ١٤)

$$e^2 = |e|^2 \text{ (جتا } 2e \text{ + ت } 2e \text{ هـ)}$$

$$e^3 = |e|^3 \text{ (جتا } 3e \text{ + ت } 3e \text{ هـ)}$$

⋮

$$e^n = |e|^n \text{ [جتا } (n \cdot e) \text{ + ت } (n \cdot e) \text{ هـ]} \text{ لكل عدد طبيعي } n \text{ (٤ - ١٥)}$$

وعندما تكون $|e| = 1$ فإننا نحصل على العلاقة الهامة :

$$\text{(جتا } e \text{ + ت } e \text{ هـ)}^n = \text{جتا } (n \cdot e) \text{ + ت } (n \cdot e) \text{ هـ} \text{ (٤ - ١٦)}$$

والتي تعرف بنظرية دي موافر (De Moivre)

تدريب (٤ - ١٢)

(١) اكتب تفصيلاً لبرهان (٤ - ١٤) ثم استنتج (٤ - ١٥)

(٢) احسب $18 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sqrt{3}t}{2} \right)$

(٤) عملية القسمة :

لعلك تستنتج بسهولة أن مرافق $E = |E|$ (جتا هـ + ت جـ هـ) هو :

(٤ - ١٧) $\bar{E} = |E|$ (جتا هـ - ت جـ هـ)

وبما أن حتا = (هـ - هـ) = حتا هـ ، حا = (هـ - هـ) = - حا هـ (لماذا ؟)

فإن بوسعنا أن نعيد كتابة (٤ - ١٧) بالشكل :

(٤ - ١٨) $\bar{E} = |E|$ (حتا (هـ - هـ) + ت حا (هـ - هـ))

سنترك لك استخدام (٤ - ١٠) ، (٤ - ١٨) ، (٤ - ١٣)

لتحصل على ناتج قسمة $E = |E|$ (حتا هـ + ت حا هـ)

على $E = |E|$ (حتا هـ + ت حا هـ) $\neq 0$

(٤ - ١٩) لتحصل على : $\frac{|E|}{|E|} = \frac{E}{E}$ (حتا (هـ - هـ) + ت حا (هـ - هـ))

مثال (٤ - ١٠) :

باعتبار $E = 3 + 3t$ ، $E = \sqrt{3} - t$ كما في مثال (٤ - ٩) ، احسب :

$\frac{E}{E}$ ، $\frac{E}{E}$ ، باستخدام الصيغة المثلثية .

الحل :

بالرجوع إلى مثال (٤ - ٩) نجد أن :

$|E| = \sqrt{3} = 2$ ، $|E| = 45$ ، $E = 330$

ومن (٤ - ١٣) فإن :

$${}^2_1ع = [جتا (٢ هـ) + ت جا (٢ هـ)]$$

$$[جتا ٩٠ + ت جا ٩٠] {}^2_{\sqrt{2}} =$$

$$١٨ = (ت + ٠)$$

$$ت = ١٨$$

$${}^6_٢ع = [جتا (٦ \times ٣٣٠) + ت جا (٦ \times ٣٣٠)]$$

$$[جتا (١٩٨٠) + ت جا (١٩٨٠)] ٦٤ =$$

(لماذا ؟)

$$[جتا (١٨٠) + ت جا (١٨٠)] ٦٤ =$$

$$٦٤ = [٠ + ١ -]$$

$$- = ٦٤$$

ومن (٤ - ١٩) نحصل على :

$$\frac{{}^2_1ع}{٢} = \frac{\sqrt{2}}{٢} [جتا (٣٣٠ - ٤٥) + ت جا (٣٣٠ - ٤٥)]$$

$$= \frac{٢}{\sqrt{2}} [جتا (٢٨٥ -) + ت جا (٢٨٥ -)]$$

(لماذا ؟)

$$= \frac{٢}{\sqrt{2}} [جتا ٧٥ + ت جا ٧٥]$$

$$\approx ٢١٢ [٠.٢٥٩ + ت ٠.٩٦٦]$$

$$\approx ٠.٥٥ + ٢٠.٥ ت$$

تدريب (٤ - ١٣)

أوجد ناتج كل مما يأتي :

$$(١) ٤ (جتا \frac{٢}{٣} + ت جا \frac{٢}{٣}) \times ٢ (جتا \frac{٢}{٣} + ت جا \frac{٢}{٣})$$

$$(٢) ٦ (جتا \frac{٢}{٤} + ت جا \frac{٢}{٤}) \div ٣ (جتا \frac{٢}{٤} + ت جا \frac{٢}{٤})$$

$$(٣) [٢ (جتا \frac{٢}{٦} + ت جا \frac{٢}{٦})]$$

$$(٤) [جتا \frac{٢}{٤} + ت جا \frac{٢}{٤}]$$

تمارين (٤ - ٤)

(١) ارسم المتجهات التي تمثل الأعداد التالية :

$$(P) \quad 6 \quad (B) \quad \sqrt{37} - 3 \quad (D) \quad (D) \quad 10 - 10 - 10 \quad (D) \quad 10 - 10 - 10$$

(٢) أوجد القيمة المطلقة $|ع|$ والزاوية القطبية $هـ$ $\Rightarrow [0, 360^\circ)$ لكل من الأعداد المركبة في

التمرين (١) ، ثم ضع كلاً من هذه الأعداد في الصيغة المثلثية .

(٣) اكتب الأعداد التالية بالصورة $س + ص ت$:

$$(P) \quad \sqrt{27} \quad (B) \quad (جتا ٤٥^\circ + ت جا ٤٥^\circ) \quad (D) \quad (جتا ٣٠^\circ + ت جا ٣٠^\circ)$$

$$(D) \quad ٢ (جتا ٩٠^\circ + ت جا ٩٠^\circ) \quad (D) \quad ٥ (جتا ١٨٠^\circ + ت جا ١٨٠^\circ)$$

$$(H) \quad ١٠٠ [جتا (-١٥^\circ) + ت جا (-١٥^\circ)]$$

(٤) ارسم المتجهات الممثلة للأعداد :

$$ع = ٥ + ٥ ت \quad , \quad ع = ٤ - ت \quad , \quad ع = ٢ = ٣ ت$$

ثم عين على المستوى المركب المتجهات الممثلة للأعداد

$$(P) \quad ع + ١ع \quad (B) \quad ع + ٣ع - ٢ع \quad (D) \quad ١ع \quad ٢ع \quad ٣ع \quad (H) \quad \frac{١ع}{٣ع}$$

(٥) استخدم متباينة المثلث ، والتي تنص على أن مجموع طولى أي ضلعين في مثلث لا يقل عن

طول الضلع الثالث في إثبات أن :

$$|١ع + ٢ع| \leq |١ع| + |٢ع| \quad \text{لكل } ع, ١ع \Rightarrow ك$$

(٦) استخدم الصيغة (٤ - ١٣) لإيجاد $١ع$ ، $٢ع$ ، حيث $١ع = ١ + ت$ ، $٢ع = ٣ + ٢ - ت$.

وضح إجابتك بالرسم .

(٧) استخدم الصيغة (٤ - ١٥) لحساب كلٍ من القوى التالية :

$$(P) \quad ت^٧ \quad (B) \quad (١ + ت)^{١٠} \quad (D) \quad (١ - \sqrt{37} ت)^{١٤} \quad (D) \quad (١ - \sqrt{37} ت)^{١٤}$$

(٨) استخدم الصيغة (٤ - ١٩) لإيجاد :

$$(٢) \quad \frac{ت + ١}{ت} \quad (ب) \quad \frac{ت + \sqrt{٣٧}}{ت - ١} \quad (ج) \quad \frac{(ت + ١)^2}{ت \sqrt{٣٧} - ١}$$

(٤ - ٧) الجذور التكعيبية للعدد ١

نحن نعلم من دراستنا السابقة أن للعدد الحقيقي ١ جذراً تكعيبياً واحداً هو : $١ = \sqrt[٣]{١}$

وذلك لأن المعادلة $١ = ع^٣$ (٤ - ٢٠)

ليس لها حل في ح سوى $ع = ١$ أما إذا سمحنا للعدد ع بأن يكون عدداً مركباً فإن

الوضع يختلف ، وسنجد عندئذ أن للمعادلة (٤ - ٢٠) جذرين إضافيين في ك .

لنفرض أن $ع = س + ص ت$ جذر تكعيبى للعدد ١ ، فهو إذن يحقق المعادلة (٤ - ٢٠)

$$١ = ع^٣$$

$$\Leftarrow ٠ = ١ - ع^٣$$

$$\Leftarrow ٠ = (١ - ع) (١ + ع + ع^٢) \quad \text{بتحليل الطرف الأيمن}$$

$$\text{إذن : } ٠ = ١ - ع \quad \text{أو} \quad ٠ = ١ + ع + ع^٢$$

من المعادلة الأولى نحصل على : $ع = ١$

ومن المعادلة الثانية نحصل باستخدام القانون (٤ - ٩) على :

$$ع = \frac{١ - \sqrt[٣]{٤ - ١\sqrt{٣}} + ١}{٢} = \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt[٣]{٣}}{٢} ت$$

وبذلك نجد أن للعدد الحقيقي ١ ثلاثة جذور :

الأول منها هو الجذر الحقيقي المعروف سلفاً $ع = ١$

والجذران الآخران هما العدان المركبان المترافقان

$$ع = \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt[٣]{٣}}{٢} ت$$

$$ع = \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt[٣]{٣}}{٢} ت$$

$$\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}i} = |r_c| \text{ لاحظ أن } |r_c| = 1$$

$$|r_c| = 1$$

مما يدل على أن الجذور الثلاثة جميعها تقع على الدائرة $|z| = 1$ التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها واحد .

لاحظ أيضا أن زاوية r_c القطبية هي $\frac{\pi}{4}$ ، تحقق :

$$\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

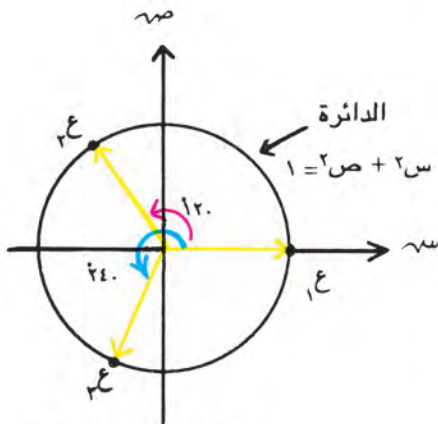
$$\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

فإذا كان $\theta = 0$ ، $\theta = 2\pi$ نتج عن ذلك أن $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ،

وبما أن $r_c = \bar{r}_c$ فإن الزاوية القطبية للجذر r_c

تساوي $-\frac{\pi}{4}$ ، أي أن r_c ممثلة في الفترة

$$[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] \text{ بالزاوية } -\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{4}$$



شكل (٤-١٨)

جذور العدد ١ التكعيبية

وبذلك نحصل على توزيع الجذور التكعيبية r_1, r_2, r_3 للعدد ١ على دائرة الوحدة المبين

في الشكل (٤-١٨) ، حيث تفصل الزاوية 120° بين كل جذر والذي يليه . لاحظ أن النقاط

r_1, r_2, r_3 هي رؤوس مثلث متطابق الأضلاع مرسوم في دائرة الوحدة (لماذا؟)

تدريب (٤-١٤)

$$(1) \text{ تحقق من أن } r_1 = r_2 = r_3 = 1$$

$$(2) \text{ أثبت أن } r_1 = r_2 \text{ وأن } r_2 = r_3$$

(3) أثبت أن المجموعة $\{r_1, r_2, r_3\}$ بعملية الضرب على K هي زمرة دائرية يولدها

$$\text{العدد } \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \text{ حيث } r_1 = 1, r_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}, r_3 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$$

مثال (١١٤) :

احسب الجذور التكعيبية للعدد ٨ .

الحل :

المطلوب هو إيجاد العدد المركب z الذي يحقق $z^3 = 8 = 2^3$ $\Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8}$.
وقد وجدنا أن مجموعة الحل لهذه المعادلة الأخيرة هي الجذور التكعيبية للواحد ، أي :

$$\{1, \omega, \omega^2\} = \left\{1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

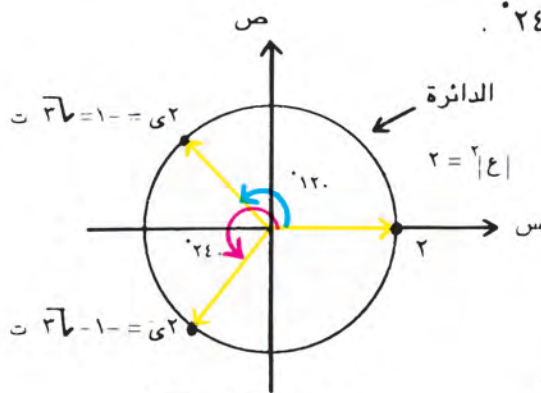
إذن :

$$\frac{1}{2} z \in \{1, \omega, \omega^2\}$$

$$\Leftrightarrow z \in \{2, 2\omega, 2\omega^2\}$$

أي أن الجذور التكعيبية للعدد ٨ هي $2, 2\omega, 2\omega^2$ ، $2\omega = -1 - \sqrt{3}i$

لاحظ هنا أن الجذور لا تختلف عن نظيراتها الجذور التكعيبية للعدد ١ إلا من حيث القيمة المطلقة ، فهي موزعة بانتظام على الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $2 = \sqrt[3]{8}$ ، كما في الشكل (٤ - ١٩) ، وأولها هو الجذر الحقيقي 2 المعروف على الزاوية القطبية 0° ، والثاني على زاوية 120° ، والثالث على زاوية 240° .



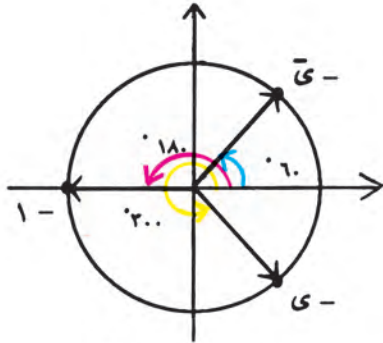
شكل (٤ - ١٩)

جذور العدد ٨ التكعيبية

تدريب (٤ - ١٥)

أثبت أن مجموع الجذور التكعيبية للعدد ١ يساوي الصفر ، ومن ثم استنتج أن مجموع الجذور التكعيبية للعدد ٨ أيضا يساوي الصفر .

مثال (٤ - ١٢) :



شكل (٤ - ٢٠)

جذور العدد ١ - التكعيبية

أوجد الجذور التكعيبية للعدد الحقيقي ١ -

الحل :

افرض أن ϵ أحد جذور ١ - التكعيبية إذن :

$$\epsilon^3 = 1 \Rightarrow \epsilon^3 - 1 = 0$$

$$1 = \epsilon^3 = (\epsilon - 1)(\epsilon^2 + \epsilon + 1) \Leftrightarrow$$

فنستنتج أن ϵ جذر تكعيبي للعدد ١ ، فهي بالتالي

تنتمي إلى المجموعة $\{1, \omega, \omega^2\}$ ، أي أن :

$$\epsilon \in \{1, \omega, \omega^2\}$$

إذن جذور العدد ١ - التكعيبية هي :

$$1, \omega = \frac{\sqrt{3}i}{2} + \frac{1}{2}, \omega^2 = \frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2}$$

تمارين (٤ - ٥)

(١) استخدم فكرة المثال (٤ - ١١) لإيجاد الجذور التكعيبية للأعداد التالية :

$$(أ) ٢٧ \quad (ب) \frac{٢٧}{١٢٥}$$

وضح إجابتك بالرسم

(٢) استخدم فكرة المثال (٤ - ١٢) لإيجاد الجذور التكعيبية للأعداد التالية :

$$(أ) ٨ \quad (ب) \frac{1}{64}$$

وضح إجابتك بالرسم

(٣) استخرج الجذور التكعيبية للعدد التخيلي $-t$ بحل المعادلة $\epsilon^3 = -t$. مثل هذه

الجذور في المستوي .

(٤) إذا كان $E = |E|$ (جتا هـ + ت حاهـ) فاستخدم الصيغة (٤ - ١٣) لاستنتاج أن حاصل الضرب E هو العدد المركب الناتج من دوران E بزاوية 90° حول نقطة الأصل ، أي أن عملية الضرب في العدد التخيلي t هو التحويل الهندسي في المستوي المركب الناتج من الدوران بزاوية 90° حول نقطة الأصل .

(٥) استخدم نتيجة التمرين (٤) في تمثيل الجذور التكعيبية للعدد - ت المطلوبة في التمرين (٣)

(٦) عبر عن الجذور التكعيبية لأي عدد حقيقي موجب s بدلالة الجذر الموجب $\sqrt[3]{s}$ والعدد المركب $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(٧) كرر المطلوب في التمرين (٦) بالنسبة لأي عدد حقيقي سالب .

(٨) أثبت أن مجموع الجذور التكعيبية لأي عدد حقيقي يساوي الصفر .

تمارين عامة

١ - بسط المقادير التالية بوضعها في الصورة $s + vt$:

$$\begin{array}{ll} (P) \frac{1}{\sqrt{3}t - 1} & (ح) \frac{(t+1)(t+2)}{(t^2-1)(t-1)} \\ (ب) (t+1)^2 & (د) \frac{1}{\sqrt{3}t - 2} - \frac{1}{\sqrt{3}t + 2} \end{array}$$

٢ - أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات التالية :

$$(P) z^2 - 7z + 10 = 0 \quad (ح) z^2 + 4z = 0$$

$$(ب) z^3 - 2z^2 + 6z - 2 = 0 \quad (د) z^5 - 5z^2 + 4 = 0$$

٣ - لأي عدد مركب E استنتج متى يكون $\bar{E} = E$ ، ومتى يكون $\bar{E} = -E$ ؟

٤ - عين مجموعة الحل لكل من العلاقات التالية :

$$(P) z + \bar{z} = 6 \quad (ب) z - \bar{z} = 2 \quad (ح) |z| = 1$$

$$(د) |z| > 1 \quad (هـ) |z| = |z| \quad (و) |z - 1| = 1$$

٥ - إذا كانت $\bar{e} = e^2$ فأثبت أن e إما عدد حقيقي أو تخيلي .

٦ - أثبت أن الضرب في العدد المركب $\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + t)$ ، (أي التحويل الهندسي $e \leftarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + t)$) هو دوران حول نقطة الأصل بزاوية 45° .

٧ - صف التحويلات الهندسية التالية :

$$(P) \quad e \leftarrow e + (2 + 3t) \quad \text{لكل } e \in \mathbb{C}$$

$$(B) \quad e \leftarrow \bar{e} \quad (C) \quad e \leftarrow t - e$$

٨ - أوجد الجذور التكعيبية للعدد التخيلي t بحل المعادلة $e^3 = t$.

٩ - إذا كان العدد المركب e هو أحد الجذور التربيعية للعدد المركب $ج$ فأثبت أن $-e$ هو الجذر التربيعي الآخر .

١٠ - إذا كان العدد المركب e هو أحد الجذور التكعيبية للعدد المركب $ج$ فأثبت أن الجذرين

$$\text{التكعيبيين الآخرين هما } e \text{ و } e^2 \text{ ، حيث } e^3 = 1 \text{ ، } e \neq 1 \text{ .}$$

١١ - باستخدام قانون دي موافر استنتج القانونين المثليين $(3 - 24i)$ ، $(3 - 25i)$ ، المعبرين عن $24i$ ، $25i$ بدلالة النسب المثلثية للزاوية θ .

(إرشاد : احسب ($24i + 25i$) بطريقتين واستفد من تساوي الناتجين) .

١٢ - أعد التمرين (١١) لحساب $24i$ ، $25i$ بدلالة النسب المثلثية للزاوية θ .

١٣ - اكتب بالشكل المثلي العدد المركب :

$$\frac{1 + 24i + 25i + 24i^2 + 25i^2 + 24i^3 + 25i^3 + 24i^4 + 25i^4 + 24i^5 + 25i^5 + 24i^6 + 25i^6 + 24i^7 + 25i^7 + 24i^8 + 25i^8 + 24i^9 + 25i^9 + 24i^{10} + 25i^{10} + 24i^{11} + 25i^{11} + 24i^{12} + 25i^{12}}$$

١٤ - اكتب العدد المركب $\left(\frac{24 - 25i}{24 + 25i} \right)$ بالصورة : $s + vt$.

أجوبة تمارين الباب الأول

التمارين (١ - ١)

$$(١) (٢٢، ٢١، ٢٣١، ٢١١) (٢) (١ - ٢)$$

$$(٢) ١٢، ١٥، ٣٦$$

$$(٣) ٣٣، ٣٦، ٥٥، ١٠، ٦٤$$

التمارين (٢ - ١)

$$(٤) (٦، ٠)، (٩، ٥، ١)، \emptyset$$

$$(٥) (٢، ٤، \frac{٣}{١٠}) (١٥)$$

$$(٦) (٢، \frac{١}{٤}) (٢٨٩)$$

التمارين (٣ - ١)

$$(٣) (١٢٩، ٥٦٧، ٤٣٢)$$

$$(٤) (٣، ٩، ١، ٤٩)$$

التمارين (٤ - ١)

$$(١) (٢) (١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦) (ب) نظائر عناصر المجموعة على الترتيب$$

$$(ج) ٤، ٤، ٤، ٤$$

$$(٢) (ب) ١، (ج) نظير ١ = ١، نظير ٣ = ٣ (د) (٢، ٠)، (٢)$$

$$(٥) (٢) (٢) (٥) (٢) (٥) (٢) (٥) (٢) (٥)$$

التمارين (١ - ٦)

- (١) (P) ٨ ، (ب) ٨ ، (ح) ٢ ، (د) ١٠
 (٢) (P) {١} ، (ب) \emptyset ، (ح) {٧} ، (د) {٧، ٣}
 (١٢) ٩ ، ٧ ، ١٠ ، ٥ ، ٨ ، ٩

تمارين عامة

- (١) (P) ١٥٩ ، (ح) الصفر
 (٢) (P) ١٢- ، (ب) لا ، (ح) لا ، لا
 (٣) (ب) لا يوجد
 (٦) ١٢ ، ١ ، ٢ ، نعم ، ١١ ، ٢

أجوبة تمارين الباب الثاني

التمارين (١ - ٢)

$$(١) \text{ أولاً : المصفوفة هي } = \begin{bmatrix} ٢١١ & ٧٠ & ٦٥ & ٠ \\ ٢٢ & ٤٦ & ٠ & ٦٥ \\ ١٨٥ & ٠ & ٤٦ & ٧٠ \\ ٠ & ١٨٥ & ٢٢ & ٢١١ \end{bmatrix}$$

- ثانياً : (P) $٤٦ = ٣٣$ ، (ب) $٤٦ = ٣٣$ ، (ح) $٣٣ = ٣٣$
 (د) الصف الثاني ٦٥ ، ٠ ، ٤٦ ، ٢٢ ، (هـ) العمود الثاني ٦٥ ، ٠ ، ٤٦ ، ٢٢
 (و) عناصر الصف الثاني هي نفس عناصر العمود الثاني
 (ز) $٠ = ٤٤ = ٣٣ = ٢٢ = ١١$
 (ح) (١) مصفوفة من النوع ٤×٤
 (٢) $س١ = س٢ = س٣ = س٤$ لجميع قيم هـ من ١ إلى ٤ وجميع قيم ي من ١ إلى ٤

$$١٠ = د ، ٠ = ح ، ٥ = ب ، ٥ = پ (٢)$$

$$\begin{bmatrix} د & ح & ب & پ \\ د & ح & ب & پ \\ د \frac{٢}{٣} & ح \frac{٢}{٣} & ب \frac{٢}{٣} & پ \frac{٢}{٣} \\ -٢د & -٢ح & -٢ب & -٢پ \end{bmatrix} (٣)$$

$$\begin{bmatrix} ١٥٠ & ١٥٠ \\ ١٠٠ & ١٥٠ \\ ١٠٠ & ٢٠ \end{bmatrix} (٤) (٥)$$

من النوع ٢×٢ وعدد العناصر ٦

$$\begin{bmatrix} ٥٠ - ع٢ & ٥٠ + س \\ ل \frac{٢٠}{٣} & ص \\ -ع٢ س & ل \frac{٤}{٣} \end{bmatrix} (ب)$$

$$١٥ = ل ، ١٠٠ = ع ، ١٥٠ = ص ، ١٠٠ = س (ح)$$

التمارين (٢ - ٢)

$$\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ ٩- & ٦- & ٤ \end{bmatrix} (١) (٥)$$

$$\begin{bmatrix} ١ + ح & ١ - ب & ١ + پ \\ ١ + و & ١ + هـ & ١ - د \end{bmatrix} (ح)$$

$$\begin{bmatrix} \text{ن} & \text{م} & \text{ل} \\ \text{ی} & \text{و} & \text{ه} \end{bmatrix} \quad (\text{د})$$

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (\text{ه})$$

$$\begin{bmatrix} ۱۲ & ۸ \\ ۱۱- & ۶- \end{bmatrix} \quad (\text{و})$$

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (\text{ط})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۷}{۱۰} \\ \frac{۱۴}{۴۰} & \frac{۳}{۸} \end{bmatrix} \quad (\text{ی})$$

$$\underline{P} + \underline{B} = \begin{bmatrix} ۲- \\ ۴ \\ ۳ \end{bmatrix} \quad \underline{B} + \underline{P} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱- \\ ۴- \end{bmatrix} \quad (\text{پ})(۲)$$

$$(\underline{B} + \underline{B}) + \underline{P} = \begin{bmatrix} ۰- \\ ۶ \\ ۷ \end{bmatrix} \quad \underline{B} + (\underline{B} + \underline{P}) = \begin{bmatrix} ۱- \\ \cdot \\ ۴- \end{bmatrix}$$

$$\underline{P} - \underline{B} = \begin{bmatrix} ۴ \\ \cdot \\ ۷- \end{bmatrix} \quad \underline{B} - \underline{P} = \begin{bmatrix} ۴- \\ \cdot \\ ۷ \end{bmatrix} \quad \underline{B} - \underline{P} = \begin{bmatrix} ۰- \\ ۳ \\ ۴ \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

$$\begin{bmatrix} 1- \\ 2- \\ 3 \end{bmatrix} = (\underline{ج} + \underline{ب}) - \underline{پ} \cdot \begin{bmatrix} 7- \\ 2 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7- \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \underline{ج} + (\underline{ب} - \underline{پ}) (\underline{د})$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2- & 1- \\ 0- & . \end{bmatrix} \quad (\underline{ب})$$

$$\begin{bmatrix} 6- & 4- \\ 4 & 2 \\ 1. & . \end{bmatrix} \quad (\underline{پ}) (\underline{ج})$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & . \end{bmatrix} \quad (\underline{د})$$

$$\begin{bmatrix} . & . \\ . & . \\ . & . \end{bmatrix} \quad (\underline{ح})$$

$$\begin{bmatrix} 3- \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\underline{ا})$$

$$\begin{bmatrix} 14 & 0- \\ 31 & 10 \end{bmatrix} \quad (\underline{ب})$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 1. \end{bmatrix} \quad (\underline{پ}) (\underline{د})$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 22 & 1. \end{bmatrix} \quad (\underline{د})$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 1. \end{bmatrix} \quad (\underline{ح})$$

$$\begin{bmatrix} 6- & 2. \\ 7- & 10 \end{bmatrix} \quad (\underline{و})$$

$$\begin{bmatrix} 2- & 4 \\ 9- & 0 \end{bmatrix} \quad (\underline{ا})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4- \\ 1- & 0- \end{bmatrix} = \underline{س} \quad (\underline{ب})$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4- \\ 9 & 0- \end{bmatrix} = \underline{س} \quad (\underline{پ}) (\underline{و})$$

$$\begin{bmatrix} 14 & 2 \\ 19 & 1 \end{bmatrix} = \underline{س} \quad (\underline{د})$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 20 & . \\ 4 & . \end{bmatrix} = \underline{س} \quad (\underline{ح})$$

التمارين (٢ - ٤)

(١) (٢) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$ ، (ب) لا يوجد نظير ضربى

(ج) لا يوجد نظير ضربى ، (د) $\begin{bmatrix} 1 & 2- \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} \end{bmatrix}$

(هـ) $\begin{bmatrix} 3- & 1- \\ \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$ ، (و) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$

(ز) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، (ح) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$

(٢) (٢) س = ٤ ، (ب) س = ٦ ±

(ج) س = ٤ أو س = ٢ - ، (د) س = ٠ أو س = ٣

(٦) (٢) س = ١- $\begin{bmatrix} 1- & 4 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ = ص ١- $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$

(ب) س = ١- ص ١- $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ ، ص ١- س ١- $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{12} \end{bmatrix}$

(ج) (س ص) ١- $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{2}{2} & 0 \end{bmatrix}$

التمارين (٢ - ٥)

(١) (P) س = ١ ، ص = ٠ (ب) س = ١ ، ص = ١ (ج) س = ١٤ ، ع = ٣

(د) س = ٤ ، ص = ٥ (هـ) س = ٠ ، ص = ١ (و) س = ١٢ ، ص = ١٢

$$\begin{bmatrix} 60 & 20 & 30 \\ 50 & 36 & 43 \\ 70 & 41 & 37 \\ 40 & 12 & 16 \end{bmatrix} \quad (P) \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 16 & 37 & 43 & 30 \\ 12 & 41 & 36 & 20 \\ 40 & 70 & 50 & 60 \end{bmatrix} \quad (ب)$$

$$\begin{bmatrix} 1900 & 700 & 1000 \\ 1600 & 1080 & 1290 \\ 2200 & 1230 & 1110 \\ 1200 & 360 & 480 \end{bmatrix} \quad (ج)$$

$$\begin{bmatrix} {}^0 1. \times 60 & {}^1 1. \times 20 & {}^2 1. \times 30 \\ {}^0 1. \times 50 & {}^1 1. \times 36 & {}^2 1. \times 43 \\ {}^0 1. \times 70 & {}^1 1. \times 41 & {}^2 1. \times 37 \\ {}^0 1. \times 40 & {}^1 1. \times 12 & {}^2 1. \times 16 \end{bmatrix} \quad (د)$$

$$\begin{bmatrix} \xrightarrow{A} & \overset{B}{100} & \overset{P}{.} \\ 80 & . & 90 \\ . & 90 & 80 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} P \\ B \\ A \end{matrix} \quad (3)$$

$$\begin{matrix} & \text{ك} & & \text{ق} \\ & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ & & & \text{ب} \\ & & & \text{ا} \end{matrix} \quad (4) \quad (2)$$

$$\begin{matrix} & \text{ع} & & \text{س} \\ & \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ & & & \text{ق} \\ & & & \text{ك} \end{matrix} \quad (ب)$$

$$\begin{matrix} & \begin{bmatrix} 16 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \\ & & & & & \text{ا} \end{matrix} \quad (ح)$$

التمارين (٢-٦)

(١) (٢) ، (ب) - ١٢٠ ، (ح) صفر

(د) - ٤ ، (هـ) صفر ، (و) صفر

(٢) (٢) س = ٢ ، ص = ١ ، (ب) س = $\frac{9}{13}$ ، ص = $\frac{8}{13}$

(ح) س = $\frac{17}{22}$ ، ص = $\frac{9}{11}$ ، (د) ل = ٠ ، ك = ٠

(٤) س = ٥ ، ص = ١٢

(٥) هـ \exists ح - {٦}

$$\bullet = \text{ع} , \quad \text{ا} = \text{ص} , \quad \bullet = \text{س} \quad (پ) \quad (٦)$$

$$\frac{\text{ع}}{\text{ا}} = \text{ل} , \quad \frac{\text{ا}}{\text{ا}} = \text{ص} , \quad \frac{\bullet}{\text{ا}} = \text{س} \quad (ب)$$

$$\frac{\text{ا}}{\text{ا}} = \text{ع} , \quad \frac{\text{ا}}{\text{ا}} = \text{ص} , \quad \frac{\text{ا}}{\text{ا}} = \text{س} \quad (ح)$$

$$\frac{\text{ا}}{\text{ا}} = \text{ع} , \quad \frac{\text{ا}}{\text{ا}} = \text{ص} , \quad \frac{\text{ا}}{\text{ا}} = \text{س} \quad (د)$$

$$\{ \text{ا} \} - \text{ع} \exists \text{ا} \quad (٧)$$

التمارين العامة

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 13 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\text{س}} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 3- & 1- \\ 1- & 4- \end{bmatrix} = \text{النظير الجمعي} \quad (2) \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{4}{11} \end{bmatrix} = \text{النظير الضربي}$$

$$\begin{bmatrix} 2- & 4- \\ 2- & 6- \end{bmatrix} = \text{النظير الجمعي} \quad (ب)$$

لا يوجد نظير ضربي

$$\begin{bmatrix} 6- & 2- \\ 4- & 3- \end{bmatrix} = \text{النظير الجمعي} \quad (ح)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{4}{10} \end{bmatrix} = \text{النظير الضربي}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \text{النظير الجمعي} \quad (د)$$

لا يوجد نظير ضربي

$$(3) \quad [2 \text{ ص} + 2 \text{ ص} + 2 \text{ ص}]$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \underline{\text{س}}^1 \quad (5) \quad (ب)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \underline{\text{پ}}^2 \quad (6) \quad (پ)$$

$$(ب) \quad \text{س} = 2, \quad \text{ص} = 1$$

(7) (پ) لا يوجد حل

$$(ب) \quad \frac{2}{23} = \text{س}, \quad \frac{77}{23} = \text{ص}$$

$$(9) (پ) \quad \frac{7}{39} = \text{س}, \quad \frac{6}{13} = \text{ع}, \quad \frac{1}{39} = \text{ل}$$

$$(ب) \quad \frac{9}{5} = \text{س}, \quad \frac{87}{20} = \text{ص}, \quad 3 = \text{ع}$$

$$(ح) \quad \frac{98}{747} = \text{س}, \quad \frac{229}{1494} = \text{ص}, \quad \frac{53}{498} = \text{ع}$$

أجوبة تمارين الباب الثالث

التمارين (٣ - ١)

- (٤) ٢٣ره سم ، ٢٣ره٥٥ سم ، ٢٠ر٩٣ سم ، ٧ر٩٤ سم
(٥) ٥ راديان

التمارين (٣ - ٢)

- (١) $\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٤}{٥}$
(٤) $\frac{١٢}{٥}$ ، $\frac{١٢}{١٣}$ ، $\frac{٥}{١٣}$
 $\frac{١٢}{٥}$ ، $\frac{١٢}{١٣}$ ، $\frac{٥}{١٣}$
(٦) سالب ، موجب ، سالب
(٧) $\sqrt{٣}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
(٨) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
(٩) $\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{٥}{٤}$ ، $\frac{٣}{٥}$
 $\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{٥}{٤}$ ، $\frac{٣}{٥}$
(١٠) $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٥}{٣}$ ، $\frac{٤}{٥}$
 $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٥}{٣}$ ، $\frac{٤}{٥}$

- (١٦) $\frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٤}$ ، $(\sqrt{٣} + ٢) -$ ، $٢ - \sqrt{٣}$
(١٧) قناه (١٨) ظناه (١٩) قناه

التمارين (٣ - ٣)

$$\sqrt{36} - , \frac{\sqrt{36}}{2} - , \frac{\sqrt{36}}{2} , \frac{1}{2} - \quad (١)$$

$$١ - , ١ - , \frac{\sqrt{27}}{2} - , \frac{\sqrt{27}}{2} \quad (٢)$$

$$\sqrt{36} , \frac{\sqrt{36}}{2} , \frac{\sqrt{36}}{2} - , \frac{1}{2} - \quad (٣)$$

$$١ , ١ , \frac{\sqrt{27}}{2} , \frac{\sqrt{27}}{2} \quad (٤)$$

$$\frac{\sqrt{27}}{2} , \sqrt{36} , \frac{1}{2} , \frac{\sqrt{36}}{2} \quad (٥)$$

$$\frac{\sqrt{27}}{2} , \sqrt{36} , \frac{1}{2} , \frac{\sqrt{36}}{2} \quad (٦)$$

$$\sqrt{36} - = \text{ظا ه} \quad (٨) \quad \text{قتا ه} \quad (٧)$$

$$\sqrt{36} - = \text{ظا ه} , \frac{\sqrt{36}}{2} = \text{حاه} \quad (١٠)$$

$$\frac{\sqrt{36}}{2} - = \text{حتا ه} , \frac{1}{2} - = \text{حاه} \quad (١١)$$

$$\frac{\sqrt{36}}{2} = \text{حتا ه} , \frac{1}{2} - = \text{حاه} \quad (١٢)$$

التمارين (٤ - ٣)

$$\sqrt{36} \text{ سم} = |ب د| , \sqrt{36} \text{ سم} = |ب ح| , ١٦ = |ح پ| \quad (١)$$

$$٠.٥ (ب) , ٠.٥ (پ) \quad (٤) \quad ٨ - \quad (٢)$$

$$\sqrt{36} \text{ سم} = |ح پ| , ١٦ = |ب ح| \quad (٥)$$

$$٩.٥ \text{ قدم} \quad (٧) \quad ١٤ \text{ م} \quad (٦)$$

التمارين (٣ - ٥)

$$(3\sqrt{2} + 2) - (ب) \quad (1 - 3\sqrt{2}) \frac{\sqrt{2}}{4} (پ) (١)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} (د) \quad (1 + 3\sqrt{2}) \frac{\sqrt{2}}{4} - (ح)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} (ز) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} (و) \quad \frac{1}{2} (هـ)$$

$$\frac{24}{7} - , , \frac{7}{20} - (٢)$$

$$\frac{44}{120} - , \frac{4}{5} - , \frac{2}{5} - , \frac{117}{120} (٤)$$

$$(\sqrt{50} + 9) \frac{1}{8} , (\sqrt{50} - 9) \frac{1}{8} (٥)$$

$$(ب) ٢ حتاه حای (پ) ٢ حتاه حای (٦)$$

$$(د) ٢ حتاه حای (ح) ٢ حتاه حای$$

التمارين (٣ - ٦)

$$\frac{1}{10\sqrt{2}} - , \frac{3}{10\sqrt{2}} , \frac{24}{7} , \frac{7}{20} , \frac{24}{20} (١)$$

$$\frac{120}{119} - , \frac{119}{169} , \frac{120}{169} - , \frac{5}{13} (٢)$$

$$٥ , \frac{1}{26\sqrt{2}} , \frac{5}{26\sqrt{2}} (٣)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - (و) , ١ (هـ) , \frac{\sqrt{2}}{2} (د) , \frac{\sqrt{2}}{2} (ح) , \frac{\sqrt{3}}{2} (ب) , \frac{1}{2} (پ) (٦)$$

التمارين (٣ - ٧)

$$(1) \quad (P) \quad \frac{1}{4} \quad , \quad (ب) \quad \frac{1 - \sqrt{3}}{4} \quad , \quad (ج) \quad \frac{\sqrt{3} + 2}{4} \quad , \quad (د) \quad \frac{1 - \sqrt{3}}{4}$$

$$(هـ) \quad -\frac{1}{4} \quad , \quad (و) \quad \frac{1}{2}$$

$$(2) \quad (P) \quad -2 \text{ حنا } 6 \text{ حنا } 2 \quad , \quad (ب) \quad 2 \text{ حنا } 6 \text{ حنا } 2$$

$$(ج) \quad 2 \text{ حنا } 5 \text{ حنا } 2 \quad , \quad (د) \quad 2 \text{ حنا } 5 \text{ حنا } 2$$

$$(هـ) \quad -2 \text{ حنا } 45 \text{ حنا } 20 \quad , \quad (و) \quad 2 \text{ حنا } 20 \text{ حنا } 2$$

$$(ز) \quad 2 \text{ حنا } 30 \text{ حنا } 15 \quad , \quad (ح) \quad 2 \text{ حنا } 30 \text{ حنا } 15$$

التمارين (٣ - ٨)

$$(1) \quad (P) \quad \left\{ \frac{11}{6} , \frac{7}{6} \right\} \quad , \quad (ب) \quad \{ 330 , 210 \}$$

$$(2) \quad (P) \quad \left\{ \frac{14}{3} , \frac{7}{3} \right\} \quad , \quad (ب) \quad \{ 240 , 60 \}$$

$$(3) \quad (P) \quad \{ 7 , 0 \} \quad , \quad (ب) \quad \{ 180 , 0 \}$$

$$(4) \quad (P) \quad \left\{ \frac{7}{4} \right\} \quad , \quad (ب) \quad \{ 45 \}$$

$$(5) \quad (P) \quad \left\{ 2 , \frac{14}{3} , 7 , \frac{7}{3} , 0 \right\} \quad (ب) \quad \{ 360 , 240 , 180 , 120 , 0 \}$$

$$(6) \quad (P) \quad \left\{ \frac{7}{3} , 0 \right\} \quad , \quad (ب) \quad \{ 90 , 0 \}$$

$$(7) \quad (P) \quad \left\{ \frac{7}{2} , \frac{7}{2} , \frac{7}{4} , \frac{7}{4} , \frac{5}{4} , \frac{7}{4} \right\} \quad (ب) \quad \{ 315 , 225 , 135 , 45 , 270 , 90 \}$$

$$(8) \quad (P) \quad \left\{ \frac{11}{6} , \frac{7}{6} \right\} \quad , \quad (ب) \quad \{ 330 , 210 \}$$

$$(9) \quad (P) \quad \left\{ \frac{7}{4} , \frac{5}{4} , \frac{7}{4} , \frac{7}{4} \right\} \quad (ب) \quad \{ 315 , 225 , 135 , 45 \}$$

$$(10) (P) \left\{ \frac{ط٤}{٣}, \frac{ط٢}{٣}, ط, ٠ \right\} (ب) \{ \cdot ٢٤٠, \cdot ١٢٠, \cdot ١٨٠, \dots \}$$

$$(11) (P) \left\{ \frac{ط٧}{٤}, \frac{ط٥}{٤}, \frac{ط٣}{٤}, \frac{ط}{٤}, \frac{ط٢}{٢}, \frac{ط}{٢} \right\} (ب) \{ \cdot ٣١٥, \cdot ٢٢٥, \cdot ١٣٥, \cdot ٤٥, \cdot ٢٧, \cdot ٩, \dots \}$$

$$(12) (P) \left\{ \frac{ط١١}{٦}, \frac{ط٧}{٦}, \frac{ط}{٢} \right\} (ب) \{ \cdot ٣٣٠, \cdot ٢١٠, \cdot ٩٠, \dots \}$$

$$(13) (P) \left\{ \frac{ط٥}{٦}, \frac{ط}{٦}, \frac{ط٥}{٣}, \frac{ط}{٣} \right\} (ب) \{ \cdot ١٥٠, \cdot ٣٠, \cdot ٣٠, \cdot ٦, \dots \}$$

$$(14) (P) \left\{ \frac{ط٥}{٣}, \frac{ط}{٣}, ط, ٠ \right\} (ب) \{ \cdot ٣٠٠, \cdot ٦٠, \cdot ١٨٠, \dots \}$$

$$(15) (P) \left\{ \begin{array}{l} س = م + \frac{ط}{٢} \\ س = م + \frac{ط}{٤} \end{array} \right\} (ب) \left\{ \begin{array}{l} س = ١٨٠ \\ س = ١٨٠ + ٤٥ \end{array} \right\} \exists ك$$

التمارين (٣ - ٩)

$$(1) \hat{ح} = ٤٣, \bar{ب} = ٢٢ \text{ ر } ١٤٢, \bar{ج} = ٤٢ \text{ ر } ١٠٠$$

(2) لا يوجد للمثلث حل

$$(3) \hat{ح} = ٤٨ \text{ ر } ٨, \hat{پ} = ٣٧ \text{ ر } ٢, \bar{پ} = ٣٩ \text{ ر } ١٥٥$$

$$(4) \bar{پ} = ٤٩ \text{ ر } ٨, \hat{ب} = ٢١ \text{ ر } ٢٠, \hat{ج} = ٢٧ \text{ ر } ١٢٣$$

$$(5) \bar{پ} = ٣٢ \text{ ر } ١٢٩, \bar{ب} = ٥٨ \text{ ر } ١٥٢, \hat{ت} = ٤٣ \text{ ر } ٤٩$$

$$(6) \hat{پ} = ٤٨ \text{ ر } ٣٦, \hat{ب} = ١٢ \text{ ر } ٥٣, \hat{ج} = ٩٠$$

$$(7) \hat{ح} = ٢٧ \text{ ر } ٣٨, \hat{ب} = ٣٣ \text{ ر } ٥١, \hat{ت} = ١٧ \text{ ر } ٣٤١١$$

(8) ٣٣٦ وحدة مربعة .

$$(10) \hat{ب} = \hat{ح} = ٤٨ \text{ ر } ١٩, |ب ح| = \bar{پ} = ٧٤٤٨ \text{ و } ٦٧ \text{ متراً}$$

$$(11) \hat{ب} = ٩٠, \hat{ج} = ٣٠, \bar{ب} = ١٦ \text{ سم}, \bar{ج} = ٨ \text{ سم}$$

$$(12) ١٢٠, ٢١ \text{ سم}$$

التمارين العامة

(٣) ٨ ر . راديان

$$\frac{2}{5} \pm (ح) , \frac{2}{4} \pm (ب) , \frac{2}{5} \pm (پ) (٤)$$

$$\frac{2}{5} \pm (و) , \frac{4}{5} (هـ) , \frac{4}{5} - (د)$$

$$\frac{4}{3} \pm (ط) , \frac{4}{5} - (ح) , \frac{2}{5} + (ز)$$

$$(٥) \frac{\sqrt{3}}{4} , ٢٧٤٧٤٧٧٤ , .٧٦٧٩١١ , .٧٦٦٠٤٤٤ - , \frac{\sqrt{3}}{2} -$$

$$٢٦ م = ٢٥٩٨ م (٦)$$

$$٣٠ م , ٣٠ م (٧)$$

$$\frac{٥٠ + \sqrt{٥٠} \cdot ٤}{٥٥} (ب) \quad \frac{٤ - \sqrt{٥}}{٥} (پ) (٨)$$

$$\sqrt{3} (ح) , \frac{1}{4} (ب) \quad \frac{1}{4} (پ) (٩)$$

$$\{ \cdot ١٨٠ , \cdot ٢٤٠ , \cdot ١٢٠ \} (ب) \quad \left\{ \frac{٣٤}{3} , \frac{٣٢}{3} \right\} (پ) (١٤)$$

$$\{ \cdot ٣٠٠ , \cdot ٦٠ \} (ب) \quad \left\{ \frac{٣٥}{3} , \frac{٣}{3} \right\} (پ) (١٥)$$

$$\{ \cdot ٣٣٠ , \cdot ٢١٠ , \cdot ١٥٠ , \cdot ٣٠ \} (ب) \quad \left\{ \frac{٣١١}{6} , \frac{٣٧}{6} , \frac{٣٥}{6} , \frac{٣}{6} \right\} (پ) (١٦)$$

$$٩٣٨ = \bar{پ} , \cdot ١١٦٤٥ = \hat{پ} , \cdot ٢٤٥٠ = \hat{ب} (١٧)$$

$$\cdot ٨٥٧ = \hat{ح} , \cdot ٥٢٥٣ = \hat{ب} , ١٠٠٧ = پ (١٨)$$

$$٣٢٤٠٤ = ب , ٣٩٠٢٧ = ح (١٩)$$

$$\cdot ١٢٠ = س (٢٢)$$

أجابة تمارين الباب الرابع

التمارين (٤ - ١)

$$(١) \text{ ح } (٥, ١٦)$$

$$(٢) \text{ پ } : (١, ٠) \text{ ب } : \{(١, ٠) (٠, ٠)\} \text{ ح } : \{(١, ١) (١, ٢)\} \text{ د } : \{(١, ٣) (١, ٤)\}$$

التمارين (٤ - ٢)

$$(١) \text{ پ } : \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢} \text{ ت } ، \text{ ب } : \text{ ت } ، \text{ ح } : \frac{٧}{١٣} - \frac{٤}{١٣} \text{ ت } ، \text{ د } : \text{ ت } - \text{ ت}$$

$$(٥) \text{ ت } ، \text{ ت } - \text{ ت } ، \text{ ت } ، \text{ ت } ، \text{ ت } ، \text{ ت} - \text{ ت} ، \text{ ت} - \text{ ت}$$

$$(٦) \text{ ت } ، \text{ ت} + \frac{٤}{٥} ، \text{ ت} - \frac{٧١}{٢٥} - \frac{٢٠٣}{٢٥} \text{ ت} ، \text{ ت} - \text{ ت} ، \text{ ت} - \text{ ت}$$

$$(٧) \text{ ت} + \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} ، \text{ ت} - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} ، \text{ ت} - \frac{١}{٤}$$

$$(٩) \{ \text{ت} - \text{ت} ، \text{ت} - \text{ت} \}$$

التمارين (٤ - ٣)

$$(٥) \frac{١}{\sqrt{٢}} \pm (٥)$$

$$(٦) \frac{١}{\sqrt{٣}} \pm (٦)$$

$$(٧) \pm (٧)$$

$$(٨) \frac{٣}{٢٥} ، \frac{٤}{٢٥}$$

$$(٩) \text{ س } = \text{ ص } = \frac{٥}{\sqrt{٢}}$$

$$(١٠) \text{ س } = \text{ ص } = \text{ ت}$$

$$(12) \{ -1, -t, t \}$$

$$(13) t \pm$$

$$(14) \{ -t, -\sqrt{t}, \sqrt{t} \}$$

التمارين (٤ - ٤)

$$(2) (أ) 6 (جتا ١٨٠ + ت جا ١٨٠) \quad (ب) 2 \sqrt{37} (جتا ٢٠٠ + ت جا ٢٠٠)$$

$$(ج) 1 (جتا ٩٠ + ت جا ٩٠) \quad (د) 7 \sqrt{27} (جتا ٢٢٥ + ت جا ٢٢٥)$$

$$(6) 6 -$$

$$(7) -t, 22, t, -\frac{1}{t} + \frac{\sqrt{37}}{t}, -8192, (t + 1)\sqrt{37}$$

$$(8) -1, t, \sqrt{27}, (\text{جتا } 70 + \text{ت حا } 70), -\sqrt{27}, (\text{جتا } 10 + \text{ت حا } 10)$$

التمارين (٥ - ٤)

$$(1) \left\{ \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5} \right\}, \{ -2, 2, 2 \}$$

$$(2) \{ -t, t, t \}$$

$$(6) \sqrt{s^2}, \sqrt{s^2}, \sqrt{s^2}$$

التمارين العامة

$$(1) \quad \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} \text{ ت} , 16 , 1 - \frac{\sqrt{3}}{7} \text{ ت}$$

$$(2) \quad \{2, 0\} , \{2, 0\} \text{ ت} , \frac{1}{\sqrt{3}} \pm 1 - , \{2, 0\}$$

$$(8) \quad \{-, \text{ت} \text{ ي} , -, \text{ت} \text{ ي}\}$$

$$(11) \quad \text{حتا } 2 = \text{حتا } 2 - \text{حا } 2 , \text{حا } 2 = \text{حا } 2 - \text{حا } 2$$

$$(12) \quad \text{حتا } 2 = \text{حتا } 4 - \text{حتا } 2 - \text{حا } 2$$

$$\text{حا } 2 = \text{حا } 2 - \text{حا } 4$$

$$(13) \quad \frac{\text{حتاس}}{\text{حتاص}} [\text{حتا (س - ص)} + \text{ت حا (س - ص)}]$$

$$(14) \quad \text{ت} -$$

